CAPITOLO

G7

Le trasformazioni geometriche

Letture allo specchio!

Ingegni, ossesso, anilina: tre esempi di palindromi, ovvero di parole che si possono leggere sia da sinistra verso destra, sia da destra verso sinistra. Esistono anche delle frasi palindrome, come per esempio «I re sono seri», o perfino interi componimenti letterari. Ma se guardi la parola INGEGNI allo specchio ottieni IИᘓƎᘓИI, che rispetta sì la successione delle lettere, ma non la loro forma…

…esistono parole che si possono leggere anche allo specchio?

La risposta a pag. G354

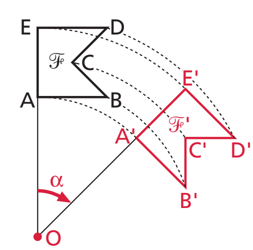
1. Che cosa sono le trasformazioni geometriche

Introduciamo il concetto di trasformazione geometrica prendendo come esempio una rotazione.

Consideriamo il punto O e un angolo orientato di ampiezza α (figura 1). Al punto A associamo il punto A' tale che $OA \cong OA'$.

Allo stesso modo, possiamo associare a un altro punto B il punto B', a C il punto C' e così via.

Abbiamo creato una corrispondenza fra punti del piano. Tale corrispondenza è biunivoca perché, fissato il punto O e l'angolo orientato α, a ogni punto del piano corrisponde uno e un solo punto del piano stesso e viceversa.



▲ **Figura 1** **Al punto A associamo A', al segmento AB il segmento $A'B'$, al poligono $ABCDE$ (figura $\mathcal{F}$) il poligono $A'B'C'D'E'$ (figura $\mathcal{F}'$).**

DEFINIZIONE

Trasformazione geometrica

Una trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano un punto del piano stesso.

In altre parole, una trasformazione geometrica è una *funzione biiettiva* del piano in sé.

Ogni punto (o figura) che si ottiene mediante una trasformazione geometrica viene detto **trasformato** o **immagine** del punto (o della figura) di partenza.

Nell'esempio precedente il punto A' è immagine di A, il segmento $A'B'$ è immagine del segmento AB.

Se indichiamo con r la rotazione, r rappresenta una funzione, quindi possiamo anche scrivere $A' = r(A)$.

Si legge «A' uguale a erre di A».

Quando in una trasformazione a un punto corrisponde se stesso, diciamo che il punto è **unito**.

Per esempio, nella rotazione precedente il punto O è un punto unito.

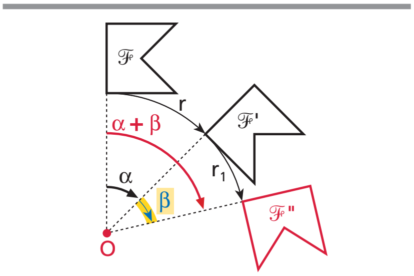
La composizione di trasformazioni

Poiché le trasformazioni geometriche sono funzioni, possiamo considerare la loro **composizione**.
Date due trasformazioni geometriche t e t', se al punto P viene associato il punto $P' = t(P)$ e a P' viene associato $P'' = t'(P')$, la **composizione** di t' con t associa al punto P il punto P''.

Indichiamo la composizione delle due trasformazioni allo stesso modo della composizione di funzioni, ossia con la scrittura $t' \circ t$.

Si legge «t' composto t».

La figura $\mathcal{F}''$, corrispondente della figura $\mathcal{F}$ mediante $t' \circ t$, si trova applicando prima t e poi t'.



◀ **Figura 2** Composizione di due rotazioni: una rotazione intorno a O di un angolo α, seguita da una rotazione intorno a O di un angolo β, equivale a un'unica rotazione intorno a O di $\alpha + \beta$.

L'identità

DEFINIZIONE

Identità

L'identità è la trasformazione che a ogni punto del piano associa il punto stesso.

Per esempio, fra le rotazioni di centro O quella in cui l'angolo di rotazione è nullo è l'identità.

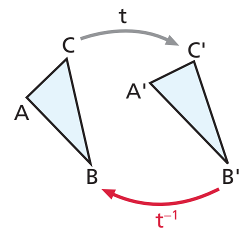
Indichiamo l'identità con i. In una identità tutti i punti sono uniti:

$$\forall P, \quad P = i(P).$$

La trasformazione inversa

Poiché le trasformazioni geometriche sono funzioni biiettive, l'inversa di una trasformazione geometrica è ancora una trasformazione geometrica.

In generale, data una trasformazione t che associa a un punto P il punto P', la **trasformazione inversa** associa al punto P' il punto P e viene indicata con il simbolo $\boldsymbol{t^{-1}}$.

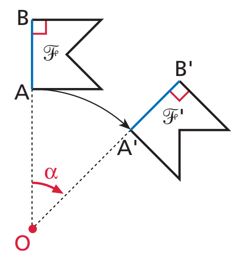


Per esempio, la trasformazione inversa della rotazione precedente r è la rotazione r^{-1} di stesso centro e angolo di uguale ampiezza ma orientato in verso contrario.

La composizione di una trasformazione con la sua inversa ha come risultato la trasformazione identità $t^{-1} \circ t = i$.

Gli invarianti di una trasformazione

Consideriamo di nuovo una rotazione di centro O e angolo α (figura a lato): osserviamo che il lato AB è congruente al lato $A'B'$, le due figure $\mathscr{F}$ ed $\mathscr{F}'$ sono entrambe concave, un angolo retto viene trasformato in un angolo retto.



Le proprietà delle figure che non cambiano nelle trasformazioni si chiamano **invarianti** della trasformazione.

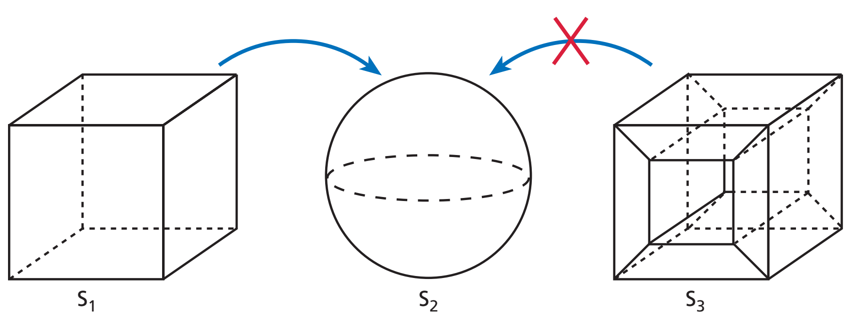
Presentiamo ora una classificazione sintetica e intuitiva delle trasformazioni geometriche, basata sugli invarianti. Cominciamo dalle trasformazioni con il minor numero di invarianti.

Gli omeomorfismi

Tra le proprietà di un **omeomorfismo** figurano le seguenti:

- a curve chiuse corrispondono curve chiuse, a curve aperte corrispondono curve aperte;
- a curve intrecciate corrispondono curve intrecciate con lo stesso numero di nodi (i punti in cui le curve intersecano se stesse);
- se un punto è intersezione di due curve, il punto che gli corrisponde risulta intersezione delle curve corrispondenti.

Un invariante di un omeomorfismo è la **continuità** delle figure. Gli omeomorfismi sono anche chiamati *trasformazioni topologiche*.

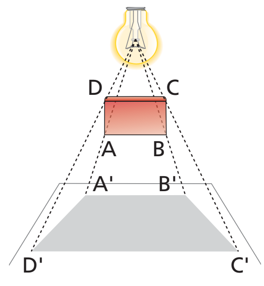


▼ **Figura 3** Dei due poliedri, solo il cubo S_1 è trasformabile nella sfera S_2 mediante una trasformazione topologica. Poliedri di questo tipo vengono detti **semplicemente connessi**. Si può dimostrare che per essi, detti F il numero delle facce, V quello dei vertici, S quello degli spigoli, vale la seguente **formula di Eulero per i poliedri**: $F - S + V = 2$.
Questo è un esempio di proprietà invariante in una trasformazione topologica. Scoperta da Eulero intorno al 1750, dal suo studio iniziò lo sviluppo di quella parte della matematica detta **Topologia**.
Puoi verificare che la formula non vale per poliedri non semplicemente connessi. Per esempio, nel poliedro S_3, $V = 16$, $F = 16$, $S = 32$, quindi $F - S + V = 0 \neq 2$.

Le trasformazioni proiettive

Una **trasformazione proiettiva**, o **proiettività**, è una particolare trasformazione topologica, in cui **le rette si trasformano in rette** e i segmenti in segmenti. Possiamo dire che è invariante la «rettilinearità».

Nelle proiettività viene in particolare conservata la **convessità** delle figure.

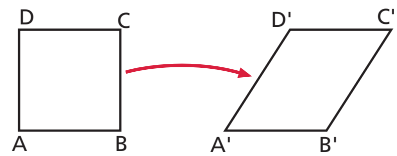


▶ **Figura 4** **L'ombra di un libro generata da una lampadina dà l'idea della trasformazione di un rettangolo (il libro) in un quadrilatero (l'ombra) mediante una proiettività.**

I triangoli si trasformano in triangoli, i poligoni convessi in poligoni convessi con lo stesso numero di lati.

Le trasformazioni affini

Una **trasformazione affine**, o **affinità**, è una particolare trasformazione proiettiva, nella quale viene conservato anche il **parallelismo fra rette**.



▶ **Figura 5** **In un'affinità al quadrato *ABCD* corrisponde il parallelogramma *A′B′C′D′*: alle rette parallele *AB* e *CD* corrispondono le rette *A′B′* e *C′D′*, ancora parallele, e così via.**

La similitudine

Una **similitudine** è un'affinità, nella quale si conserva la forma delle figure e, in particolare, la congruenza fra gli angoli; inoltre, fra i segmenti corrispondenti esiste un rapporto costante.

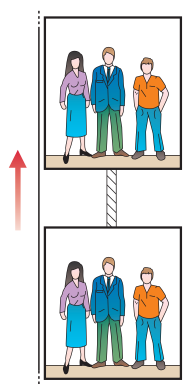
▶ **Figura 6** **Una stessa fotografia riprodotta in due formati diversi è un esempio di similitudine: la forma delle figure non cambia.**

Le isometrie

Le isometrie sono le trasformazioni che descrivono, in modo astratto, i movimenti che mantengono inalterate le misure degli oggetti, ossia i *movimenti rigidi*.

◗ **Isometria** deriva dal greco *isos*, che significa «uguale», e *métron*, che significa «misura».

Le **isometrie**, o **congruenze**, sono quindi particolari similitudini che hanno il rapporto di similitudine uguale a 1. In altre parole, esse hanno come invariante la **distanza** fra i punti: la distanza fra due punti è uguale alla distanza fra le loro immagini.



▶ **Figura 7** **Rappresentiamo un ascensore con un rettangolo. Il movimento traslatorio dell'ascensore in direzione verticale è una particolare isometria detta *traslazione*.**

Più in generale, le figure che si corrispondono in un'isometria sono congruenti.

◗ Anche l'identità può essere vista come una particolare isometria.

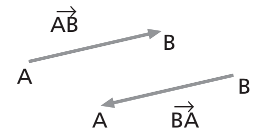
Studieremo quattro tipi di isometrie: traslazione, rotazione, simmetria centrale, simmetria assiale.

2. La traslazione

I vettori

È possibile orientare un segmento AB, fissandone un verso di percorrenza, da A verso B oppure da B verso A. Parleremo, in questo caso, di **segmento orientato**.

Indichiamo il segmento orientato da A verso B con il simbolo $\overrightarrow{AB}$ e da B verso A con il simbolo $\overrightarrow{BA}$.



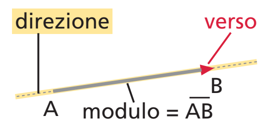
Dato un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$, diciamo che è **equipollente** ad $\overrightarrow{AB}$ ogni altro segmento orientato che ha la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso.

Nell'insieme dei segmenti orientati, la relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza, perché gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. L'equipollenza suddivide perciò i segmenti orientati del piano in classi di equivalenza. Ogni classe è chiamata **vettore** e contiene tutti e soli i segmenti fra loro equipollenti.

Vettore deriva dal latino *vector*, il cui significato è «che trasporta».

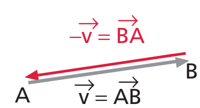
Indichiamo un vettore con una lettera sormontata da una freccia, $\vec{a}$, oppure con il segmento orientato che lo rappresenta, $\overrightarrow{AB}$.

Un vettore $\overrightarrow{AB}$ è caratterizzato da:
- il **modulo** $|\overrightarrow{AB}|$, ossia la misura della lunghezza del segmento AB rispetto a un'unità prefissata;
- la **direzione**, cioè la direzione della retta a cui appartiene il segmento;
- il **verso**.

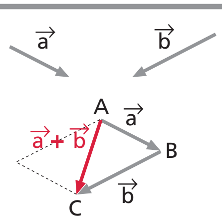


Si chiama **vettore nullo** il vettore che ha come rappresentanti i segmenti nulli. Il vettore nullo viene indicato con $\vec{0}$, ha modulo 0 e direzione e verso indeterminati.

Si chiama **vettore opposto** di un vettore $\overrightarrow{AB}$ il vettore $\overrightarrow{BA}$, ossia il vettore che ha lo stesso modulo di $\overrightarrow{AB}$ e la stessa direzione, ma verso contrario. Indichiamo il vettore opposto di $\vec{v}$ con $-\vec{v}$.



Per ottenere la **somma di due vettori** $\vec{a}$ e $\vec{b}$, rappresentiamo $\vec{a}$ con il segmento $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{b}$ con il segmento $\overrightarrow{BC}$, consecutivo al primo (figura 8). Il vettore somma è rappresentato dal segmento $\overrightarrow{AC}$. In altre parole, il vettore somma ha lunghezza e direzione della diagonale del parallelogramma di lati i due vettori. Per questa ragione, la regola per sommare due vettori assegnati è nota come **regola del parallelogramma**.



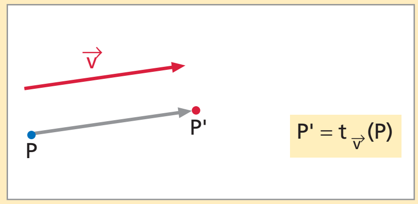
◄ **Figura 8** Facciamo coincidere il secondo estremo del primo segmento con il primo estremo del secondo segmento. Il vettore somma è $\overrightarrow{AC}$.

La traslazione

DEFINIZIONE

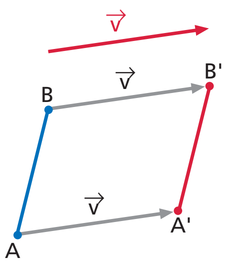
Traslazione

Fissato nel piano un vettore $\vec{v}$, una traslazione è una trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'}$ è equipollente a $\vec{v}$.



Indichiamo una traslazione di vettore $\vec{v}$ con il simbolo $t_{\vec{v}}$; analogamente, la traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$ si indica con $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Dimostriamo che una traslazione è un'**isometria**: basta dimostrare che, dati due punti qualsiasi A e B e i loro trasformati A' e B', i segmenti AB e $A'B'$ sono congruenti.



Al punto A corrisponde il punto A', a B corrisponde B'. Il quadrilatero $AA'B'B$ è un parallelogramma, perché ha due lati opposti AA' e BB' congruenti e paralleli (sono due rappresentanti del vettore $\vec{v}$). In un parallelogramma i lati opposti sono congruenti, *quindi* $AB \cong A'B'$.

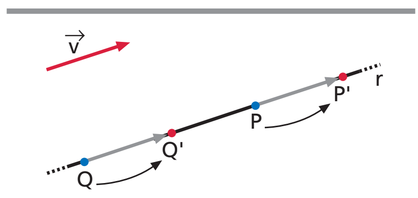
Si può dimostrare anche che alla retta AB corrisponde la retta $A'B'$ e che le due rette sono parallele.
Questa proprietà è comune a tutte le traslazioni: a ogni retta corrisponde una retta a essa parallela.

Un caso particolare di traslazione è la **traslazione nulla**, ossia la traslazione di vettore nullo. La traslazione nulla coincide con l'identità.

I punti uniti e le figure unite

Una **figura unita** è una figura che coincide con la sua trasformata.

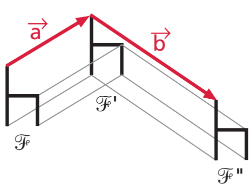
ESEMPIO In una traslazione di vettore $\vec{v}$ ogni retta parallela a tale vettore è unita. Infatti, se una retta è parallela al vettore $\vec{v}$, a ogni suo punto corrisponde ancora un suo punto, quindi alla retta corrisponde se stessa.

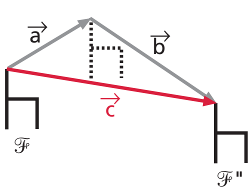


▶ **Figura 9** La retta r è parallela al vettore della traslazione. Al punto P di r corrisponde il punto P' ancora di r. La retta è unita.

In una traslazione di vettore qualsiasi non esistono punti uniti.

La composizione di due traslazioni





Applichiamo la traslazione $t_{\vec{a}}$ alla figura $\mathcal{F}$ (figura a lato). A $\mathcal{F}$ corrisponde la figura $\mathcal{F}'$.

La traslazione $t_{\vec{b}}$ fa corrispondere a $\mathcal{F}'$ la figura $\mathcal{F}''$.

La composizione delle due traslazioni $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}$ è una nuova traslazione, $t_{\vec{c}}$, il cui vettore, $\vec{c}$, è la somma vettoriale di $\vec{a}$ e di $\vec{b}$, ossia:

$$t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}} = t_{\vec{a}+\vec{b}}.$$

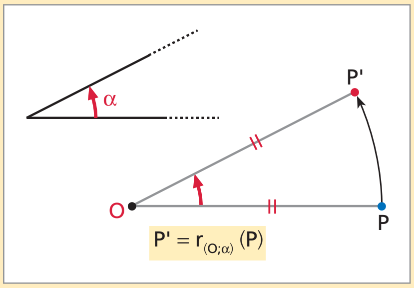
3. La rotazione

DEFINIZIONE

Rotazione

Fissati nel piano un punto O e un angolo α, la rotazione di centro O e angolo α è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che:

- $OP' \cong OP$;
- l'angolo $P\hat{O}P'$ è congruente ad α e ugualmente orientato.



Indichiamo una rotazione di centro O e angolo α con il simbolo $r_{(O;\alpha)}$.

Si può dimostrare che una rotazione è un'**isometria**.

Un caso particolare di rotazione è la **rotazione nulla**, ossia la rotazione di angolo nullo o di un angolo multiplo di un angolo giro. La rotazione nulla coincide con l'identità.
In una rotazione non nulla l'unico **punto unito** è il centro O, mentre esistono **figure unite** rispetto a particolari rotazioni. Per esempio:

- la circonferenza e il cerchio sono figure unite rispetto a una rotazione, di angolo qualsiasi, intorno al loro centro;
- il quadrato è una figura unita per rotazioni di centro il punto d'incontro delle diagonali e di angoli multipli interi di un angolo retto (un angolo retto, un angolo piatto...).

La composizione di rotazioni

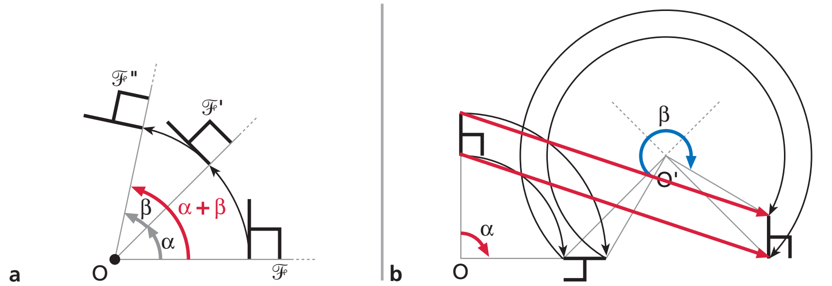
Consideriamo due rotazioni con lo stesso centro O e con angoli di rotazione diversi α e β (figura 10*a*), rotazioni indicate rispettivamente con:

$$r_{(O;\alpha)} \quad \text{e} \quad r_{(O;\beta)}.$$

La trasformazione composta $r_{(O;\beta)} \circ r_{(O;\alpha)}$ è una nuova rotazione avente lo stesso centro O e angolo uguale all'angolo somma di α e β:

$$r_{(O;\beta)} \circ r_{(O;\alpha)} = r_{(O;\alpha+\beta)}.$$

Non è detto, invece, che la composizione di due rotazioni di centri diversi sia ancora una rotazione. Osserva l'esempio della figura 10*b*.
Pertanto la composizione fra rotazioni di centri diversi **non** è un'operazione interna all'insieme delle rotazioni.



◄ Figura 10

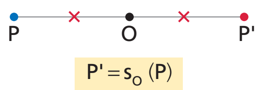
4. La simmetria centrale

DEFINIZIONE

Simmetria centrale

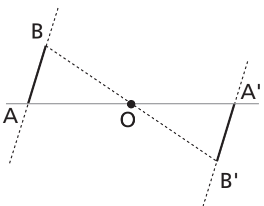
Fissato nel piano un punto O, una simmetria centrale di centro O è la trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che il segmento PP' abbia O come punto medio.

▶ Indichiamo una simmetria di centro O con il simbolo s_O.



Dalla definizione deduciamo che al punto O corrisponde se stesso, quindi O è un punto unito.

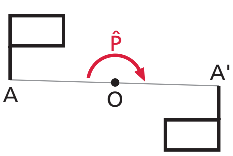
Si può dimostrare che la simmetria centrale è un'**isometria**.



Inoltre, nelle simmetrie centrali **a ogni retta corrisponde una retta a essa parallela** (figura a lato).

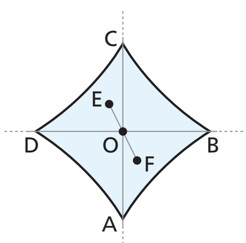
Dunque, anche nella simmetria centrale, come nella traslazione, la direzione delle rette è un invariante.

Il punto O, centro di simmetria, è l'unico **punto unito** della simmetria centrale, mentre ogni **retta** passante per O è **unita**.



La simmetria centrale può anche essere pensata come una rotazione di un angolo piatto intorno al centro di simmetria e viceversa (figura a lato).

Il centro di simmetria di una figura



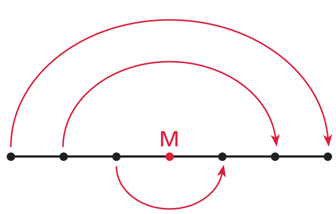
▼ Figura 11

Consideriamo la figura $ABCD$ e il punto O interno a essa (figura a lato).

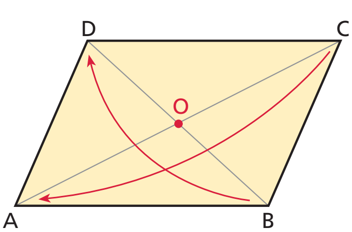
Determiniamo la figura corrispondente nella simmetria di centro O.

In questo caso particolare, osserviamo che a ciascun punto della figura corrisponde un altro punto della figura: ad A corrisponde C, a B corrisponde D, a E corrisponde F ecc. La figura data è quindi una **figura unita** rispetto alla simmetria centrale. Il punto O, centro della simmetria, è detto *centro di simmetria* della figura.

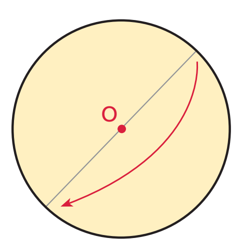
In generale, un punto del piano è detto **centro di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria centrale di centro quel punto.



a. Un segmento ha come centro di simmetria il proprio punto medio.



b. Un parallelogramma ha come centro di simmetria il punto di incontro delle diagonali.



c. Un cerchio ha come centro di simmetria il proprio centro.

La composizione di due simmetrie centrali

Consideriamo la simmetria centrale s_O applicata alla figura $\mathcal{F}$. Alla figura $\mathcal{F}$ corrisponde $\mathcal{F}'$ (figura *a*).

Applichiamo la simmetria centrale $s_{O'}$ alla figura $\mathcal{F}'$. Alla figura $\mathcal{F}'$ corrisponde $\mathcal{F}''$.

La composizione delle due simmetrie $s_{O'} \circ s_O$ è una traslazione, $t_{\vec{v}}$, il cui vettore $\vec{v}$ è il doppio del vettore che congiunge i due centri (figura *b*), ossia:

$$s_{O'} \circ s_O = t_{2\overrightarrow{OO'}}.$$

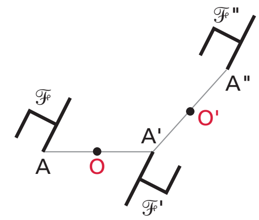
Infatti, nel triangolo $AA'A''$, il punto O è punto medio di AA' e O' è punto medio di $A'A''$, *quindi* il segmento OO' è parallelo ad AA'' ed è lungo metà del segmento stesso per il teorema di Talete.

Questo esempio fa capire che l'operazione di composizione non è un'operazione interna nell'insieme delle simmetrie centrali: componendo due simmetrie centrali non si ottiene una simmetria centrale, ma una traslazione.

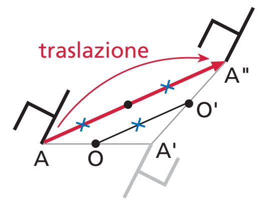
La composizione di una simmetria centrale con se stessa dà come risultato l'identità. Infatti, a un qualunque punto A corrisponde in una simmetria s_O il punto A' e al punto A' corrisponde nella stessa simmetria s_O di nuovo il punto A.

Si dice anche che la simmetria centrale è una *trasformazione involutoria*.

In generale, una trasformazione geometrica è **involutoria** quando, componendola con se stessa, si ottiene come risultato l'identità.



a



b

5. La simmetria assiale

DEFINIZIONE

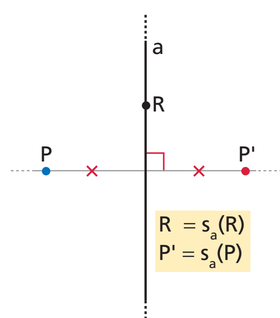
Simmetria assiale

Fissata una retta a nel piano, una simmetria assiale è la trasformazione geometrica che:

1. a ogni punto R di a fa corrispondere se stesso;

2. a ogni punto P, non appartenente ad a, fa corrispondere il punto P', dalla parte opposta di P rispetto ad a, tale che:

- P' appartiene alla retta passante per P e perpendicolare ad a;
- P e P' hanno la stessa distanza da a.



La retta a viene detta **asse di simmetria**.

Si può dimostrare che la simmetria assiale è un'**isometria**.

In una simmetria assiale, l'asse di simmetria è l'insieme di tutti e soli i **punti uniti** della trasformazione.

Indichiamo una simmetria assiale di asse a con il simbolo s_a.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Il percorso più breve

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Due punti A e B sono situati in uno stesso semipiano generato da una retta r. Determina su r il punto P tale che la spezzata APB abbia la minima lunghezza.

MARCELLO: «Dipende molto da come sono messi A e B. Bisogna esaminare più casi».

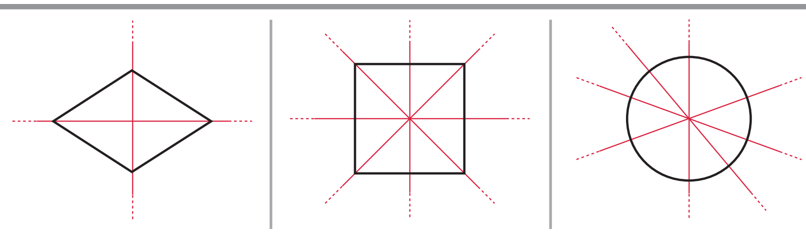
GIOVANNA: «Mi sembra che quello più semplice sia quando A e B sono alla stessa distanza da r. Partiamo da lì».

▶ Procedi come suggerisce Giovanna. Dove si trova P? Scegli poi B a diverse distanze da r e, in ognuno dei casi che esamini, determina P. Riassumi i casi in uno stesso foglio che contenga un unico punto A, i punti B_1, B_2, B_3, … e i corrispondenti P_1, P_2, P_3, … Riesci a individuare qualche proprietà?

L'asse di simmetria di una figura

Una retta del piano si dice **asse di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria assiale che ha per asse quella retta.

ESEMPIO

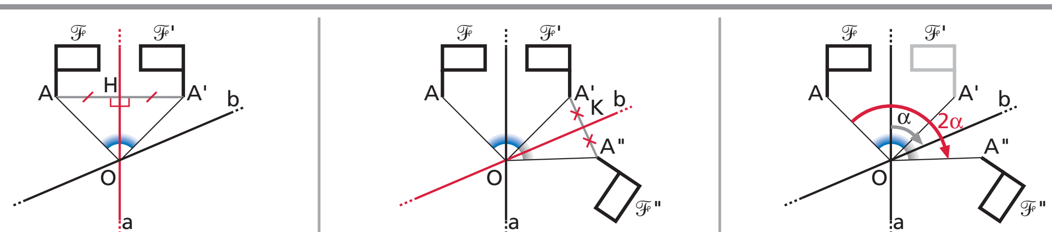


▶ **Figura 12** Sono assi di simmetria le rette
- delle diagonali, nel rombo;
- delle diagonali e dei punti medi dei lati opposti, nel quadrato;
- dei diametri, nel cerchio.

La composizione di due simmetrie assiali

La composizione di simmetrie con assi non paralleli

▼ **Figura 13** Composizione $s_b \circ s_a$. Cosa puoi dire di $s_a \circ s_b$?



a. Consideriamo le rette a e b incidenti in O. La simmetria s_a trasforma la figura ℱ nella figura ℱ'. I triangoli rettangoli AHO e OHA' sono congruenti per il primo criterio, perciò $A\hat{O}H \cong H\hat{O}A'$.

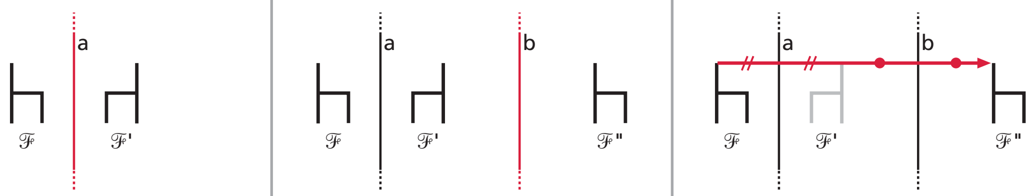
b. La simmetria s_b trasforma ℱ' nella figura ℱ". I triangoli rettangoli $A'KO$ e KOA'' sono congruenti, sempre per il primo criterio, quindi $A'\hat{O}K \cong K\hat{O}A''$.

c. La composizione delle due simmetrie $s_b \circ s_a$ è la rotazione di centro O, intersezione degli assi, e di angolo il doppio dell'angolo α segnato in figura (l'angolo convesso formato dalle rette a e b).

La composizione di una simmetria con se stessa
Se applichiamo due volte una stessa simmetria assiale, vediamo che a un punto A corrisponde il suo simmetrico A' e ad A' corrisponde di nuovo A. La simmetria assiale è quindi una trasformazione involutoria.

La composizione di simmetrie con assi paralleli

▼ Figura 14



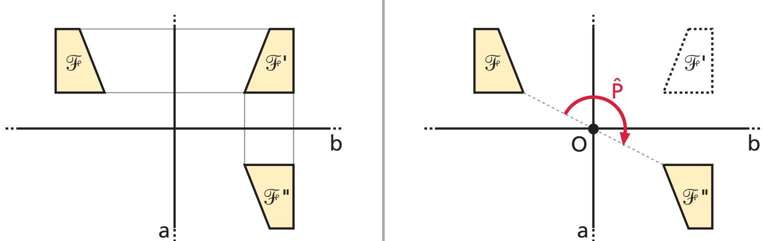
a. Consideriamo la simmetria s_a, che applicata alla figura ℱ produce la figura ℱ'.

b. Applichiamo ora a ℱ' la simmetria s_b (dove l'asse *b* è parallelo ad *a*). A ℱ' corrisponde la figura ℱ".

c. La composizione delle due simmetrie $s_b \circ s_a$ è una traslazione, il cui vettore ha per modulo il doppio della distanza fra i due assi.

La composizione di simmetrie con assi perpendicolari
Se gli assi di simmetria sono perpendicolari, la composizione delle due simmetrie equivale a una rotazione di un angolo piatto, ossia a una simmetria centrale (figura 15).

◀ Figura 15



a. Alla figura ℱ corrisponde ℱ' nella simmetria di asse *a* e a ℱ' corrisponde la figura ℱ" nella simmetria di asse *b*.

b. La figura ℱ viene trasformata in ℱ" con una rotazione di un angolo piatto $\hat{P}$ di centro *O*, ossia con una simmetria centrale di centro *O*.

Le simmetrie assiali e le isometrie
Si può dimostrare che ogni rotazione e ogni traslazione possono essere pensate come composizioni di due opportune simmetrie assiali.

Abbiamo anche visto che la simmetria centrale coincide con la rotazione di un angolo piatto e di medesimo centro.

Pertanto, possiamo dire che *ogni isometria* può essere pensata come composizione di simmetrie assiali.

ESPLORAZIONE: TASSELLARE È UN'ARTE

▲ Una tassellazione di M.C. Escher.

Le tassellazioni sono ricoprimenti del piano mediante figure geometriche disposte senza lasciare parti vuote, come, per esempio, nel pavimento di una stanza.

Nell'arte sono state rappresentate tassellazioni nelle quali figure geometriche vengono ripetute mediante traslazioni, simmetrie e loro composizioni.

IN CINQUE SLIDE

Nell'immagine di Escher prova a individuare le trasformazioni geometriche utilizzate.

Cerca in Internet altri esempi di tassellazioni, individuando il motivo che si ripete, le trasformazioni applicate.
Realizza una presentazione multimediale.

Cerca nel web: tassellazioni, Escher, plane patterns, mathematics.

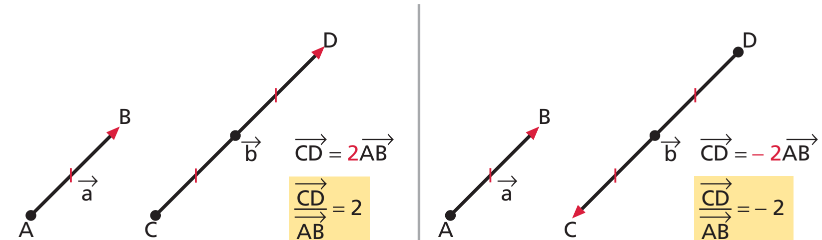
6. L'omotetia

Il rapporto fra vettori paralleli

I vettori sono segmenti orientati, quindi è possibile definire il rapporto fra due vettori paralleli in analogia al rapporto fra due segmenti.

ESEMPIO

▶ Figura 16



a. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno lo stesso verso, $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ è positivo.

b. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno verso opposto, $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ è negativo.

Il rapporto fra due vettori paralleli è quel numero reale k che esprime il rapporto fra i segmenti corrispondenti, con la seguente convenzione:

- se i vettori hanno lo stesso verso, il numero k è positivo;
- se i vettori hanno verso opposto, il numero k è negativo.

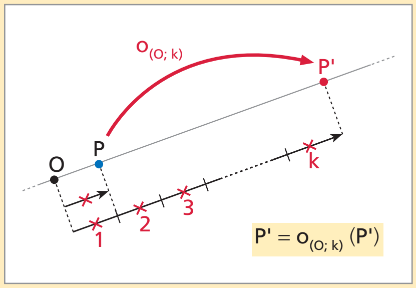
L'omotetia

DEFINIZIONE

Omotetia

Fissati un punto O nel piano e un numero reale k diverso da zero, l'omotetia è la trasformazione geometrica che a un punto P fa corrispondere il punto P' tale che:

- P' appartiene alla retta OP;
- $\dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = k$.



▶ **Omotetia** deriva dal greco *omós*, «uguale», e *thetós*, «posto».

▶ Indichiamo un'omotetia di centro O e rapporto k con il simbolo $o_{(O;\,k)}$. Per esempio, $o_{(P;\,-2)}$ indica l'omotetia di centro P e rapporto -2.

Il punto O è detto **centro** dell'omotetia e k **rapporto di omotetia**.

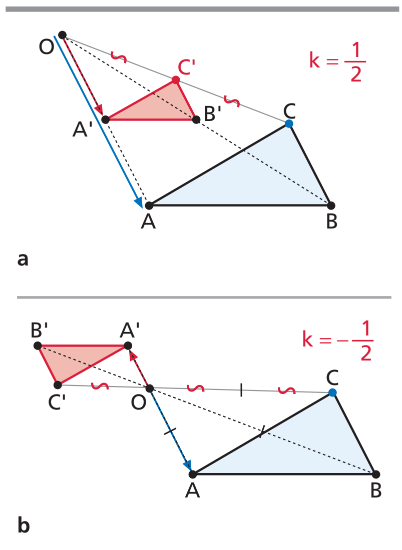
Un'omotetia si dice **diretta** se $k > 0$, **inversa** se $k < 0$.

In generale, se $|k| > 1$ la figura immagine è ingrandita rispetto a quella iniziale, se $|k| < 1$ è rimpicciolita.

In un'omotetia l'unico punto unito è il centro.

Talvolta le omotetie sono dette dilatazioni (sia per $k > 1$, sia per $k \leq 1$).

Studiamo ora i due casi particolari $k = 1$ e $k = -1$.



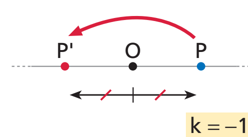
◀ **Figura 17**
a) Dato un triangolo ABC e un punto O, il triangolo $A'B'C'$ è omotetico ad ABC nell'omotetia di centro O e rapporto $\frac{1}{2}$ (omotetia diretta). Due punti corrispondenti stanno sulla stessa semiretta di origine O.
b) $A'B'C'$ è il corrispondente del triangolo ABC nell'omotetia di centro O e rapporto $-\frac{1}{2}$ (omotetia inversa). Due punti corrispondenti stanno su semirette opposte di origine O.

L'identità ($k = 1$)

Se $\dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = 1$, allora è $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}$. A ogni punto corrisponde se stesso: l'omotetia considerata è l'identità.

La simmetria centrale ($k = -1$)

Se $\dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = -1$, allora è $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$, ossia i due vettori $\overrightarrow{OP'}$ e $\overrightarrow{OP}$ hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto. L'omotetia è la simmetria centrale di centro O.
Ci limitiamo a enunciare i seguenti teoremi.



TEOREMA

In un'omotetia di rapporto k, a un segmento AB corrisponde un segmento $A'B'$ parallelo ad AB e tale che $\dfrac{A'B'}{AB} = k$.

TEOREMA

In un'omotetia a ogni angolo corrisponde un angolo congruente.

▶ Nel prossimo capitolo studieremo la similitudine, che è la composizione di un'omotetia con un'isometria o viceversa.

Letture allo specchio!

…esistono parole che si possono leggere anche allo specchio?

→ Il quesito completo a pag. G341

Una parola (o una frase) palindroma contiene in sé una forma particolare di simmetria assiale. In ogni palindromo si può infatti rintracciare un «asse di simmetria», oltre il quale le lettere si ripetono, con l'ordine rovesciato. Nel caso della parola INGEGNI, l'asse si trova sulla lettera E. Parliamo di asse di simmetria non per la forma delle lettere, ma per la loro distanza dall'asse: entrambe le I distano tre lettere dall'asse passante per la E, le N ne distano due, le G una. Osservalo nella figura seguente.

INGEGNI

In certi casi, l'asse di simmetria non passa per una lettera: è il caso della frase

ACETO NELL'ENOTECA.

Qui l'asse di simmetria passa tra le due L:

A C E T O N E L | L E N O T E C A

Se guardati con occhio esclusivamente geometrico, i palindromi non sono perfettamente simmetrici. Nella parola **INGEGNI** la forma della lettera G, per esempio, non viene riportata fedelmente dopo la riflessione sull'asse.

Allo stesso modo, mettendo la parola INGEGNI davanti allo specchio, che stabilisce una simmetria secondo un asse esterno alla parola, non si riesce a leggerla nuovamente.

A differenza della G, tuttavia, esistono lettere che, una volta riflesse, risultano identiche anche come forma. Sono le lettere:

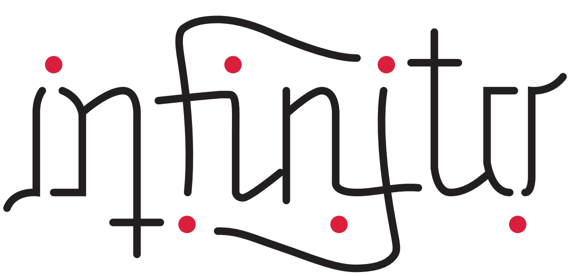
A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y.

Affinché una parola possa essere letta anche allo specchio, dovrà innanzitutto essere palindroma, inoltre dovrà essere scritta esclusivamente con lettere la cui forma abbia un asse di simmetria verticale. Le due condizioni rendono molto difficile la ricerca di parole «da specchio». Alcuni esempi sono ATTA, OTTO, AMA, TOT.

OTTO | OTTO

Se vogliamo rendere più fruttuosa la ricerca, possiamo ricorrere a un piccolo stratagemma che elimina la condizione più forte, e cioè che le parole siano palindrome. Presa una qualsiasi parola composta soltanto da lettere simmetriche, sarà sufficiente scriverla in verticale per poterla leggere allo specchio immutata. Attenzione: anche la parola IMMUTATA rimarrà immutata!

AMBIGRAMMI



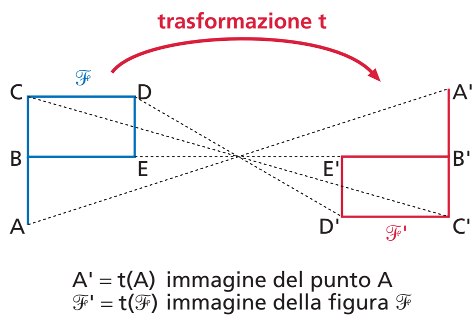
Esiste una forma di arte grafica che gioca proprio sulla simmetria e le parole. Gli ambigrammi sono immagini in cui la parola scritta può essere letta in più di un modo. La parola INFINITO qui indicata ne è un esempio: ruota il libro di 180° e…

Riconosci qualche simmetria? La posizione dei pallini rossi può aiutarti…

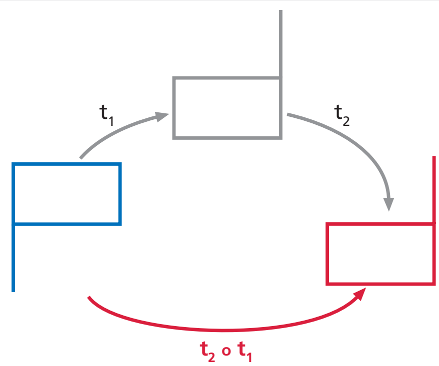
LA TEORIA IN SINTESI
Le trasformazioni geometriche

1. Che cosa sono le trasformazioni geometriche

Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano un punto del piano stesso.



Date due trasformazioni geometriche t_1 e t_2, se al punto P viene associato $P' = t_1(P)$ e a P' viene associato $P'' = t_2(P')$, la **trasformazione composta** $t_2 \circ t_1$ associa al punto P il punto P''.

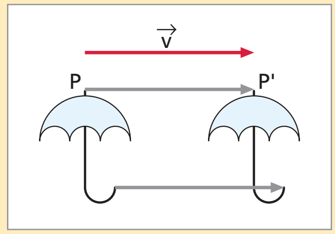
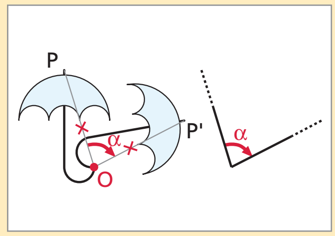
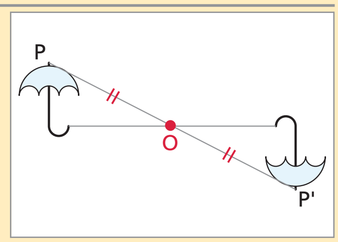
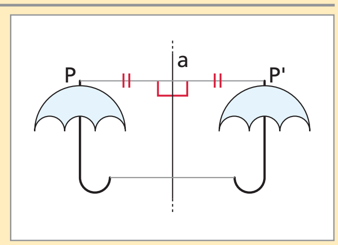


L'**identità** è la trasformazione che a ogni punto del piano associa il punto stesso.

Un **invariante** di una trasformazione è una proprietà che si conserva nel passare da una figura alla sua corrispondente.
Se, in una trasformazione, a un **punto** corrisponde se stesso, allora tale punto si dice **punto unito**.
Se, in una trasformazione, a una **figura** corrisponde se stessa, allora tale figura si dice **figura unita**.

2. 3. 4. 5. Le isometrie

Le **isometrie**, o **congruenze**, sono particolari similitudini che hanno come invariante la distanza fra punti. Nella tabella a pagina G356 sono illustrati i quattro tipi di isometrie con le relative definizioni.

ISOMETRIE			
TIPO DI ISOMETRIA	**ENTI CHE LA CARATTERIZZANO**	**A OGNI PUNTO *P* ASSOCIA IL PUNTO *P′* TALE CHE:**	**ESEMPIO**
Traslazione	vettore $\vec{v}$	$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$	
Rotazione	centro O angolo α orientato	$OP' \cong OP$ $P\hat{O}P' \cong \alpha$ $P\hat{O}P'$ è orientato come α	
Simmetria centrale	centro O	il segmento PP' ha O come punto medio (a O corrisponde se stesso)	
Simmetria assiale	asse a	P' è sulla retta passante per P e perpendicolare ad a, dalla parte opposta di P rispetto ad a; P e P' hanno la stessa distanza da a	

6. L'omotetia

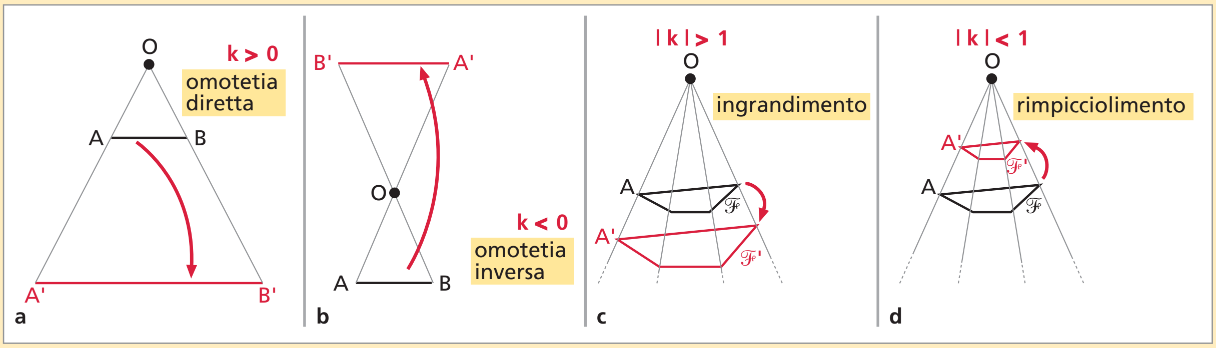
Fissato un punto O e un numero reale $k \neq 0$, un'**omotetia** fa corrispondere a un punto P il punto P' tale che:

1. P' appartiene alla retta OP;

2. il **rapporto** $\dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = k$.

Il punto O è detto **centro** dell'omotetia.

- Se $\boldsymbol{k > 0}$, l'omotetia si dice **diretta** e la figura corrispondente è dalla stessa parte di O rispetto alla figura data.
- Se $\boldsymbol{k < 0}$, l'omotetia si dice **inversa** e la figura corrispondente è dalla parte opposta rispetto a O.
- Se $\boldsymbol{|k| > 1}$, la figura immagine è **ingrandita** rispetto alla figura data; se $\boldsymbol{|k| < 1}$, è **rimpicciolita**.



1. Che cosa sono le trasformazioni geometriche

Teoria a pag. G341

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) In un'identità tutti i punti del piano sono uniti. V F

b) La composizione di due trasformazioni può non essere una trasformazione. V F

c) In ogni proiettività un invariante è il parallelismo. V F

d) La trasformazione che associa un triangolo a una spirale è un omeomorfismo. V F

e) L'inversa di una trasformazione geometrica è sempre una trasformazione geometrica. V F

f) Un'affinità è una similitudine. V F

ESERCIZI

2 TEST Una trasformazione geometrica è:

A una relazione di equivalenza fra le figure del piano.

B una corrispondenza iniettiva, che può essere non suriettiva, fra i punti del piano.

C una corrispondenza biiettiva del piano in sé.

D una corrispondenza biiettiva del piano in sé che mantiene invariate le dimensioni delle figure.

E una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano che mantiene invariata la forma delle figure.

3 TEST Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?

A La continuità e la convessità sono invarianti degli omeomorfismi.

B La convessità e il parallelismo sono invarianti delle isometrie.

C La continuità e la forma sono invarianti delle similitudini.

D La continuità, la convessità e il parallelismo sono invarianti delle affinità, delle similitudini e delle isometrie.

E La forma è invariante delle similitudini e non delle affinità.

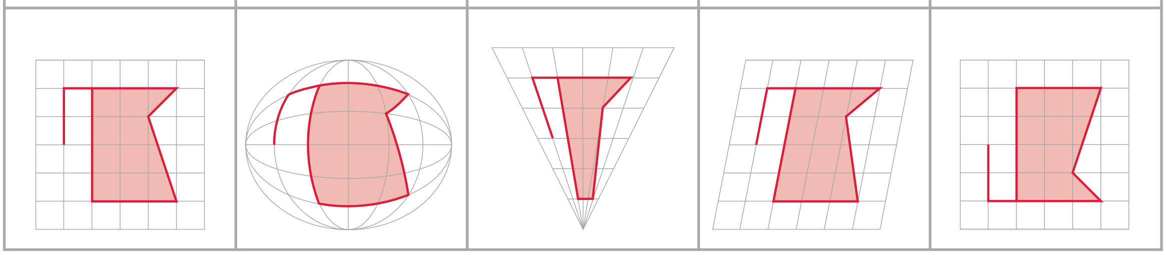
4 La trasformazione t associa a un quadrato Q un quadrato Q' di lato la metà del lato di Q. La trasformazione t' associa a un quadrato S un quadrato S' di lato il triplo del lato di S. Esegui la composizione $t' \circ t$ e poi $t \circ t'$. Le due trasformazioni composte coincidono?

5 Considera le trasformazioni t e t' dell'esercizio precedente: descrivi le trasformazioni inverse t^{-1} e t'^{-1}.

COMPLETA **inserendo al posto dei puntini il nome della trasformazione rappresentata in figura.**

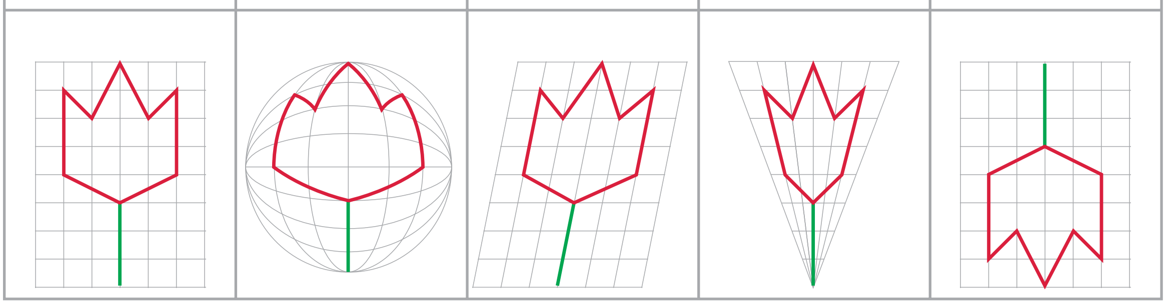
6

identità	omeomorfismo	....	....	....



7

identità	....	....	....	....



2. La traslazione

Teoria a pag. G345

RIFLETTI SULLA TEORIA

8 VERO O FALSO?

a) L'equipollenza è una relazione d'ordine che suddivide i segmenti orientati in classi di equivalenza dette vettori. V F

b) Il vettore opposto di un vettore $\vec{v}$ è un vettore che ha stesso modulo e verso di $\vec{v}$, ma direzione opposta. V F

c) La somma di due vettori opposti è il vettore nullo. V F

d) Per sommare due vettori che hanno la stessa direzione, ma versi opposti, si usa la regola del parallelogramma. V F

9 VERO O FALSO?

a) La traslazione di vettore nullo coincide con l'identità. V F

b) Una figura unita è una figura di punti uniti. V F

c) Una traslazione, diversa dalla traslazione nulla, non ha punti uniti, ma può avere rette unite. V F

d) La composizione di due traslazioni, una di vettore $\vec{v}$ e una di vettore $\vec{w}$, è una traslazione di vettore $\vec{v} + \vec{w}$. V F

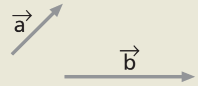
ESERCIZI Nel sito: ▶ 4 esercizi di recupero

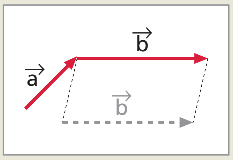
I vettori

La somma di vettori

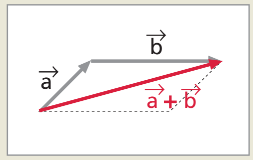
ESERCIZIO GUIDA

10 Rappresentiamo il vettore somma dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in figura.





a. Disegniamo i vettori in modo che risultino consecutivi, facendo coincidere il secondo estremo di $\vec{a}$ con il primo estremo di $\vec{b}$.

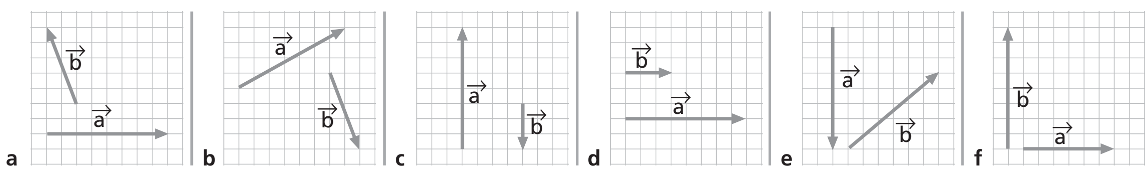


b. Disegniamo il parallelogramma avente per lati i due vettori e tracciamo la diagonale.

Il vettore somma $\vec{a} + \vec{b}$ è il vettore che ha:

- modulo uguale alla misura della lunghezza della diagonale del parallelogramma;
- direzione uguale a quella della diagonale del parallelogramma;
- verso che va dal primo estremo del primo vettore al vertice opposto del parallelogramma.

11 Rappresenta il vettore somma dei vettori indicati nelle figure.

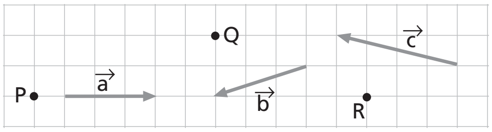


12 Verifica che l'addizione tra vettori è commutativa.

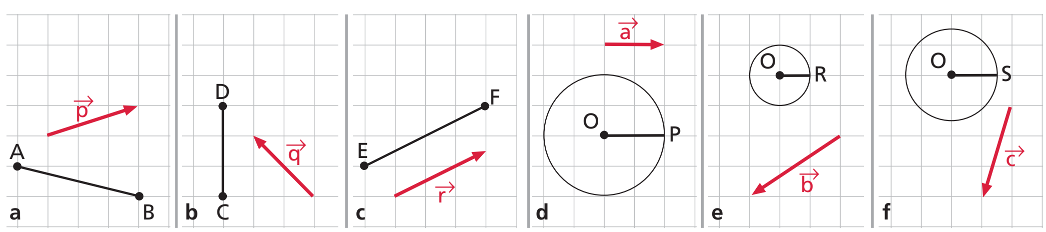
13 Verifica che l'addizione tra vettori è associativa.

La traslazione

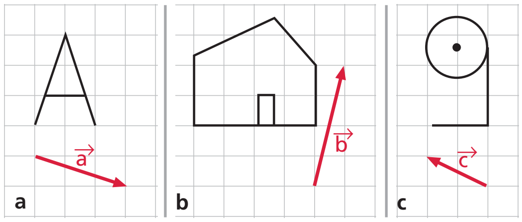
14 Applica a ogni punto della figura la traslazione di vettore indicato e determina il punto corrispondente.



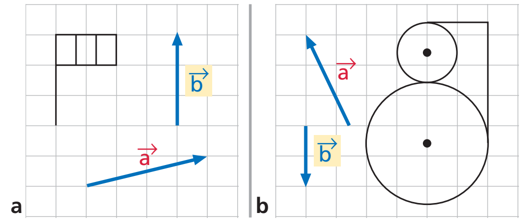
15 Trasla ogni figura secondo il vettore indicato.



16 Trasla ogni figura secondo il vettore indicato.



17 Applica a ogni figura la composizione di traslazioni $t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}}$ e poi $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}$. Si tratta della stessa trasformazione?



La traslazione e la congruenza

18 Dimostra che in una traslazione segmenti corrispondenti sono congruenti e paralleli.

19 Disegna una retta r e un segmento AB fuori di essa. Scegliendo un punto D su r, è possibile individuare un quarto punto C del piano tale che $ABCD$ sia un parallelogramma. Caratterizza, mediante un'opportuna traslazione, il luogo geometrico descritto dal punto C al variare di D sulla retta r.

20 Disegna un parallelogramma $ABCD$ di centro O. Traccia per A la parallela a BD e per D la parallela ad AC. Le due parallele si intersecano nel punto E. Determina le immagini dei punti A e D nella traslazione di vettore $\overrightarrow{EO}$.

21 Disegna il triangolo isoscele ACD sulla base AC e il punto medio M di AC. Determina l'immagine B del punto C nella traslazione di vettore $\overrightarrow{DA}$ e l'immagine N del punto B nella traslazione di vettore $\overrightarrow{CM}$. Studia la natura dei quadrilateri $ABCD$ e $BMAN$.

3. La rotazione

Teoria a pag. G347

RIFLETTI SULLA TEORIA

22 **VERO O FALSO?**

a) La rotazione è un'affinità. V F

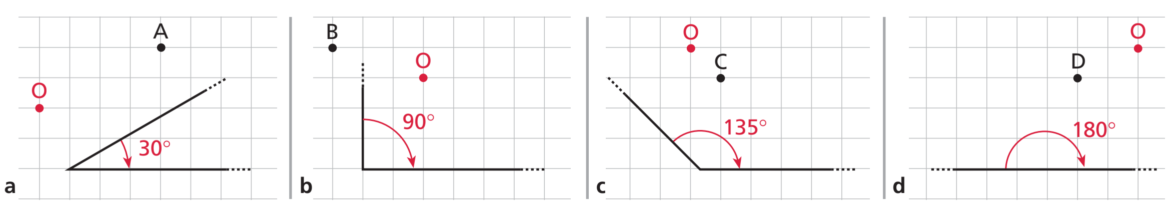
b) Fissato in un piano un punto O e un angolo α, la rotazione di centro O e angolo α è univocamente determinata. V F

c) Il triangolo equilatero è una figura unita per rotazioni di centro il baricentro del triangolo e angolo α di ampiezza pari a 120°. V F

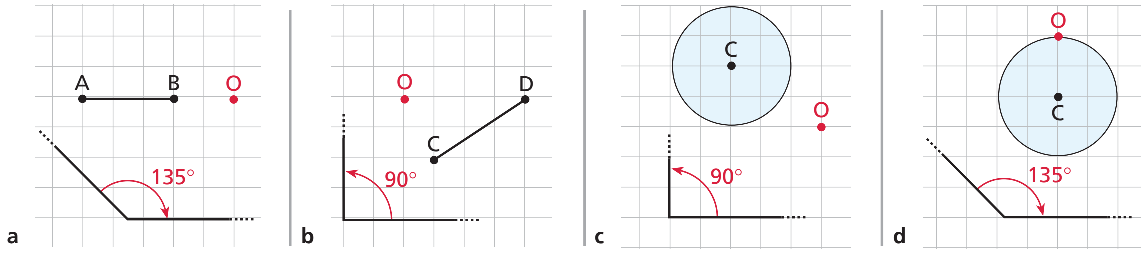
d) La composizione fra rotazioni di centri diversi è un'operazione interna all'insieme delle rotazioni. V F

ESERCIZI

23 In ogni figura applica al punto disegnato in nero la rotazione di centro O e angolo indicato.

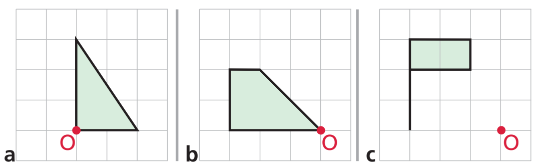


24 Applica ai segmenti e ai cerchi dati la rotazione di centro O e angolo indicato.

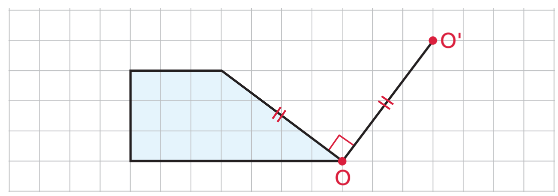


La composizione di rotazioni

25 Applica a ciascuna figura la composizione della rotazione $r_{(O;\,90°)}$ in senso antiorario con la rotazione $r_{(O;\,180°)}$ sempre in senso antiorario. Applica poi la trasformazione composta $r_{(O;\,90°)} \circ r_{(O;\,180°)}$. Le due composizioni danno la stessa trasformazione?



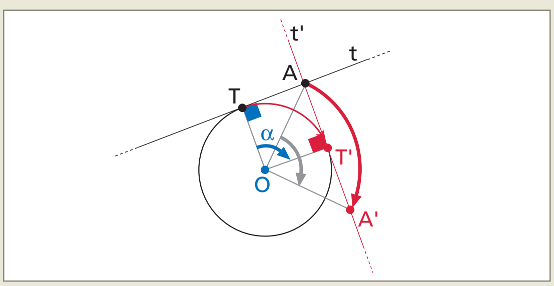
26 Applica al trapezio in figura la composizione della rotazione $r_{(O;\,90°)}$ in senso antiorario intorno a O con la rotazione $r_{(O';\,45°)}$ intorno a O', sempre in senso antiorario. Applica poi la trasformazione composta $r_{(O;\,90°)} \circ r_{(O';\,45°)}$. Ottieni la stessa trasformazione?



Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

27 Una retta t tangente a una circonferenza di centro O ruota intorno a O di un angolo α, determinando un'altra retta t'. Dimostriamo che anche t' è tangente alla circonferenza.



Ipotesi 1. t retta tangente in T alla circonferenza;
2. t' è corrispondente di t nella rotazione $r_{(O;\,\alpha)}$.

Tesi t' è tangente alla circonferenza in T'.

Dimostrazione

- Nella rotazione di centro O e angolo orientato α, al punto T della circonferenza corrisponde il punto T' della circonferenza. A un punto qualunque A della retta tangente corrisponde un punto A'.
- Poiché in una rotazione a una retta corrisponde una retta, alla retta t individuata dai punti T e A corrisponde la retta t' individuata dai punti corrispondenti T' e A'.
- La retta t' ha in comune con la circonferenza solo il punto T'. Infatti, se avesse con essa un altro punto di intersezione distinto da T', questo dovrebbe essere il corrispondente di un punto di intersezione della circonferenza con la retta t, diverso da T. Ma ciò sarebbe contro l'ipotesi 1.
- *Pertanto*, la retta t' è tangente alla circonferenza nel punto T'.

28 Dati due punti A e B nel piano, individua un punto O tale che la rotazione di 90° e centro O porti il punto A su B.

29 Disegna un triangolo ABC e costruisci esternamente i due triangoli equilateri BCE e ACF. Confronta i due segmenti BF e AE.

▶ *Caso particolare*: se ABC è equilatero, come sono i punti E, C e F?

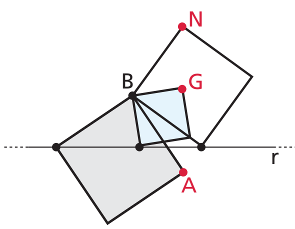
30 Dimostra che, in una rotazione di 90° e centro O arbitrario, una retta e la sua corrispondente sono sempre perpendicolari.

31 Disegna due triangoli isosceli non congruenti, OAB e OCD, rettangoli in O, unico vertice in comune. Nomina i vertici in senso antiorario e dimostra che:
a) AC è congruente a BD;
b) AC è perpendicolare a BD.

32 Disegna un quadrato $OABC$ e un triangolo equilatero OAD interno al quadrato. Costruisci esternamente al quadrato i triangoli equilateri ABE e ACF, in modo che F sia dalla parte opposta a B rispetto al vertice O.
a) Cosa puoi affermare sui punti B, O, F?
b) Dimostra che i punti C, D, E sono allineati.

33 Disegna un quadrato $ABCD$ e il suo centro O. Fissa un punto M sul lato AD e costruisci il suo corrispondente N nella rotazione di centro O di un angolo retto in senso antiorario.
a) Dimostra che N appartiene ad AB.
b) Confronta i due segmenti BM e CN.
c) Confronta gli angoli $A\hat{O}M$ e $B\hat{O}N$.
d) Confronta i triangoli MDB e ANC.

34 I tre quadrati della figura hanno in comune il vertice B e ognuno ha un vertice sulla retta r. Spiega perché i punti A, G e N sono allineati.



4. La simmetria centrale

Teoria a pag. G348

RIFLETTI SULLA TEORIA

35 VERO O FALSO?

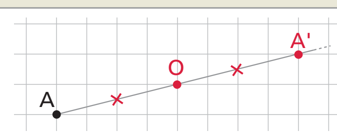
a) La simmetria centrale di centro O può essere vista come una rotazione di centro O e per angolo un angolo piatto. V F
b) La composizione di due simmetrie centrali è una simmetria centrale. V F
c) Il centro di simmetria di un rombo è il punto di incontro delle diagonali. V F
d) Nelle simmetrie centrali a ogni segmento corrisponde un segmento parallelo. V F

ESERCIZI

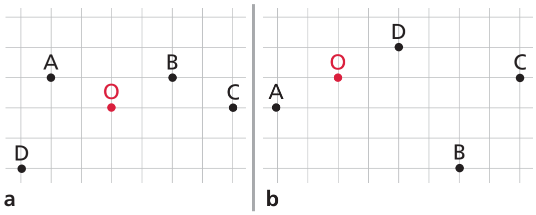
ESERCIZIO GUIDA

36 Dati i punti A e O, determiniamo il punto A' corrispondente di A nella simmetria centrale di centro O.

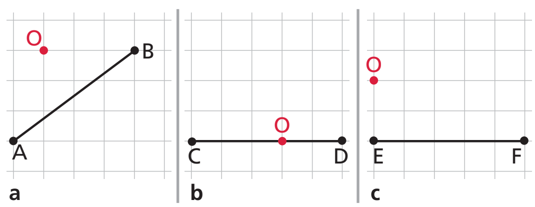
Congiungiamo A con O e prolunghiamo il segmento AO di un segmento OA' congruente al segmento AO. Il punto A' è il punto cercato.



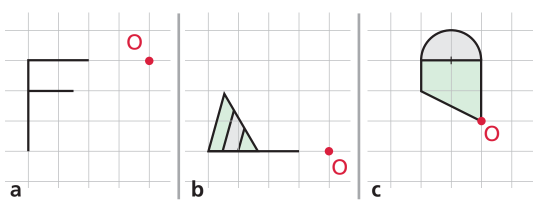
37 In ciascuna figura determina il simmetrico di ogni punto rispetto al punto O.



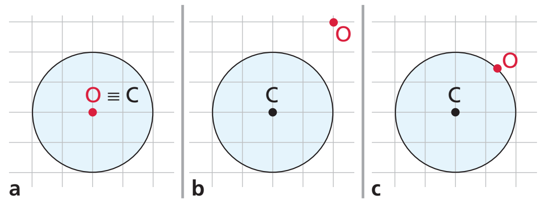
38 Disegna il simmetrico di ogni segmento in figura rispetto al punto O.



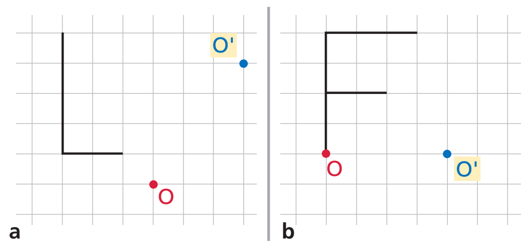
39 Disegna, per ogni figura, la figura corrispondente nella simmetria centrale di centro O.



40 Per ciascuna delle tre figure disegna il simmetrico del cerchio rispetto al punto O.



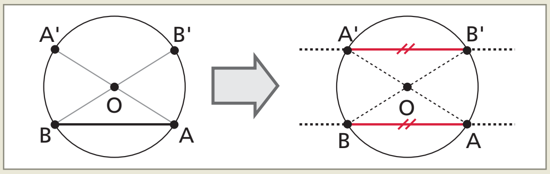
41 Trasforma le due figure mediante la composizione di simmetrie $s_{O'} \circ s_O$. Trasformale poi mediante $s_O \circ s_{O'}$. Ottieni le stesse figure trasformate?



La simmetria centrale e la congruenza

ESERCIZIO GUIDA

42 Dimostriamo che, in una circonferenza, i punti diametralmente opposti agli estremi di una corda AB sono gli estremi di una corda $A'B'$ parallela e congruente ad AB.



Ipotesi 1. AB corda;
2. AA' diametro;
3. BB' diametro.

Tesi 1. $AB \cong A'B'$;
2. $AB \parallel A'B'$.

Dimostrazione

- Il punto A' è simmetrico di A rispetto al centro O della circonferenza (ipotesi 2) e così pure B' è simmetrico di B rispetto a O (ipotesi 3).
- Poiché la simmetria centrale è un'isometria, al segmento AB corrisponde il segmento $A'B'$ a esso congruente, cioè:
  $AB \cong A'B'$.
- Inoltre, poiché in una simmetria centrale a una retta corrisponde una retta parallela, al segmento AB corrisponde il segmento $A'B'$ a esso parallelo, cioè:
  $AB \parallel A'B'$.

43 Disegna un parallelogramma $ABCD$ di centro O. Indica le immagini dei punti A, B, C e D nella simmetria di centro O e dimostra che esse formano un parallelogramma.

44 Disegna un parallelogramma $ABCD$ di centro O. Dimostra le proprietà del parallelogramma mediante la simmetria di centro O.

45 Disegna due parallelogrammi $ABCD$ e $EBFD$ in modo che abbiano la diagonale BD in comune.
a) Confronta gli angoli $E\hat{A}D$ e $B\hat{C}F$.
b) Confronta i triangoli DEC e ABF.

46 Nel triangolo ABC rettangolo in A, costruisci l'immagine D del vertice B nella simmetria di centro A e l'immagine E del vertice C nella stessa simmetria. Specifica la natura del quadrilatero $BCDE$.

47 Dimostra che due angoli con i lati paralleli discordi sono congruenti.

48 Due rette r e r' si intersecano in un punto O. Individua una circonferenza che incontra le due rette in quattro punti, vertici di un rettangolo.

49 Disegna due circonferenze C e C' tangenti esternamente in T e una retta tangente a entrambe nei punti A appartenente a C e A' appartenente a C'. Specifica la natura del triangolo $AA'T$.
(Suggerimento. Indica con O il punto medio del segmento AA' e considera la simmetria...)

50 Disegna una retta r e un segmento AC fuori di essa. Fissa su r un punto B e costruisci il parallelogramma $ABCD$. Determina il luogo dei punti D al variare di B sulla retta r.

Il centro di simmetria di una figura

51 Disegna due rette parallele r e r', intersecate da una trasversale t. Individua il centro di simmetria della figura e dimostra che t è unita.

52 Dimostra che il centro di un poligono regolare di n lati è centro di simmetria solo se n è un numero pari.

5. La simmetria assiale

Teoria a pag. G349

RIFLETTI SULLA TEORIA

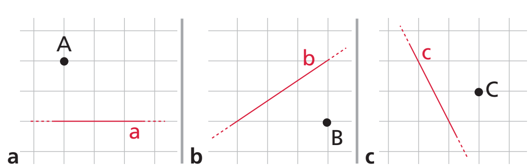
53 VERO O FALSO?

a) In una simmetria assiale l'asse di simmetria è una retta unita. V F
b) In una simmetria assiale a ogni retta corrisponde una retta a essa parallela. V F
c) La composizione di due simmetrie assiali aventi assi paralleli è ancora una simmetria assiale. V F
d) La composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari equivale a una simmetria centrale. V F

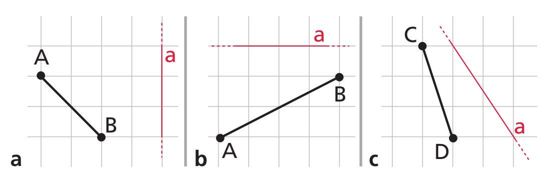
ESERCIZI

Nel sito: ▶ 5 esercizi di recupero

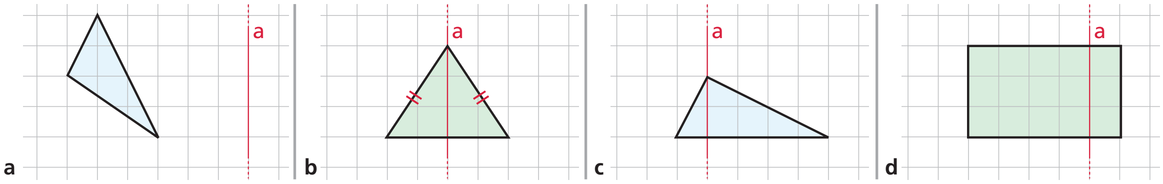
54 In ciascuna figura determina il simmetrico del punto indicato rispetto alla retta disegnata.



55 Disegna il simmetrico di ogni segmento in figura rispetto all'asse a.

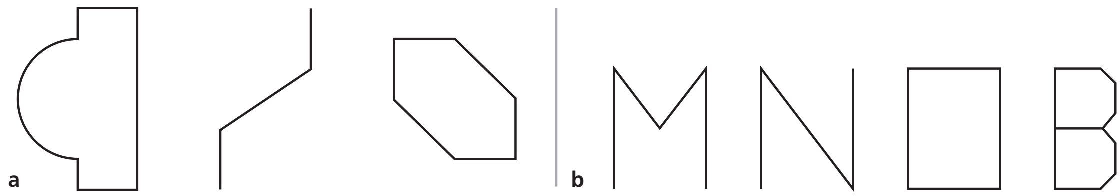


56 Disegna per ogni figura la figura corrispondente nella simmetria assiale di asse a.



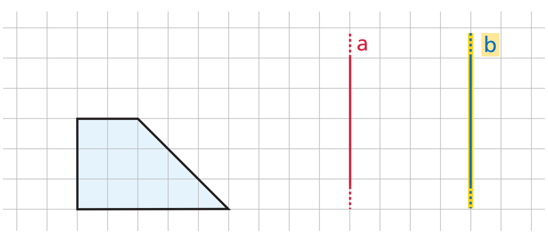
L'asse di simmetria di una figura

57 Quanti assi di simmetria possiede ogni figura? Disegnali.

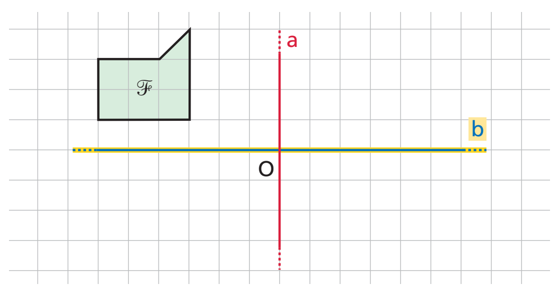


La composizione di due simmetrie assiali

58 Trasforma il trapezio in figura mediante la composizione di simmetrie assiali $s_b \circ s_a$. Trasformalo poi mediante $s_a \circ s_b$. Ottieni la stessa figura trasformata?



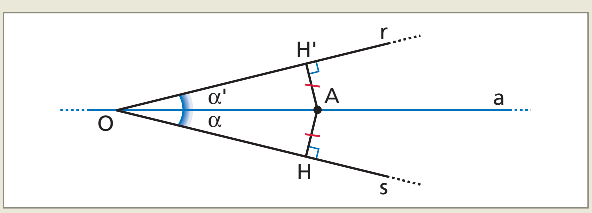
59 Disegna la figura trasformata di $\mathcal{F}$ mediante la composizione delle due simmetrie ad assi perpendicolari $s_b \circ s_a$. Applica $s_a \circ s_b$. Si tratta della stessa trasformazione?



La simmetria assiale e la congruenza

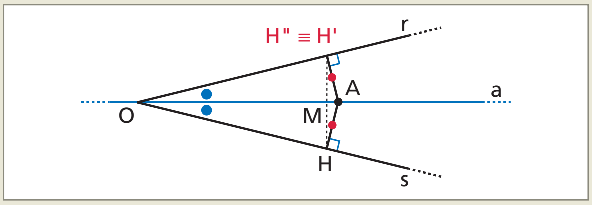
ESERCIZIO GUIDA

60 Dimostriamo, mediante una simmetria assiale, che i punti della bisettrice di un angolo sono equidistanti dai lati dell'angolo.



Ipotesi 1. $\alpha \cong \alpha'$;
2. A è un punto della bisettrice;
3. $AH \perp Os$;
4. $AH' \perp Or$.

Tesi $AH \cong AH'$.



Dimostrazione

- Nella simmetria di asse a, al punto A corrisponde se stesso, perché tutti i punti dell'asse sono uniti.
- Disegniamo il corrispondente del punto H nella stessa simmetria e lo indichiamo con H''. Dimostriamo che H'' coincide con H'. Nella simmetria di asse a, al segmento AH corrisponde il segmento AH'', alla semiretta Os corrisponde la semiretta Or.
- Per l'ipotesi 3, il segmento AH è perpendicolare a Os, quindi risulta anche $AH'' \perp Or$.
- Per l'ipotesi 4, $AH' \perp Or$; poiché è unica la perpendicolare a Or passante per A, il punto H'' deve coincidere col punto H'.
- Inoltre, poiché la simmetria assiale è un'isometria, i segmenti corrispondenti sono congruenti, quindi:

$AH \cong AH'$.

61 Dato un asse di simmetria, scegli due punti A e B, esterni all'asse, in modo che con i corrispondenti punti A' e B' si formi il rettangolo $AA'B'B$.

62 Data una retta r, scegli due punti C e D, esterni a essa, in modo che, detti C' e D' i loro corrispondenti nella simmetria assiale di asse r, i due segmenti CD e $C'D'$ siano fra loro perpendicolari.

63 Dato il quadrato $ABCD$, determina gli assi rispetto ai quali risultano simmetrici:
a) AC e BD;
b) AB e AD.

64 Disegna un rombo $ABCD$ e un punto P sulla diagonale AC. Confronta la distanza di P da AB con la distanza di P da AD.

65 Dimostra che un triangolo isoscele e il suo simmetrico rispetto alla base formano un rombo.

66 Dimostra che il luogo dei punti equidistanti da due rette parallele è la retta parallela alle date e che ha la stessa distanza da entrambe.

67 La figura intersezione di due figure che hanno un asse di simmetria comune è ancora una figura simmetrica rispetto a tale asse. Dimostralo.

68 Dimostra che l'asse di un segmento è anche suo asse di simmetria.

69 Dimostra che una corda di un cerchio ha per asse di simmetria il diametro perpendicolare alla corda.

70 Data una circonferenza e due rette parallele tangenti a essa, dimostra che la figura ha due diverse simmetrie assiali. Quali?

71 Disegna un segmento AA', il suo asse a e un punto B esterno a entrambi. Costruisci il simmetrico B' del punto B rispetto all'asse, utilizzando la sola proprietà che, in una simmetria assiale, a rette corrispondono rette.

72 Individua l'asse rispetto al quale sono simmetriche le tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno. Giustifica la risposta.

73 Disegna una retta r e due punti A e B non appartenenti a r e posti nel medesimo semipiano avente origine nella retta. Considera un punto P che può scorrere sulla retta. Determina P in modo tale che il percorso APB sia minimo.
(Suggerimento. Considera il punto B' simmetrico di B rispetto a r, congiungi A con B', …)

74 Data una circonferenza di centro O, da un punto V esterno traccia le due tangenti. Dimostra che VO è asse di simmetria per l'angolo formato dalle due semirette tangenti aventi origine in V.

75 Due circonferenze di centri O e O' e stesso raggio si intersecano in A e in B. Indica con K il punto intersezione di AB con OO'. Dimostra che la figura ottenuta ammette OO' e AB come assi di simmetria e K come centro di simmetria.

76 Disegna un triangolo ABC non isoscele e costruisci il punto M che sia equidistante dalle rette AB e AC e dai punti B e C. Giustifica la costruzione.

77 Considera una circonferenza di centro O e un punto esterno P. Conduci da P le tangenti r e r' alla circonferenza e una retta a che le interseca entrambe. Determina il punto A di a tale che la simmetria di asse OA trasformi la retta r in r'.

6. L'omotetia

Teoria a pag. G352

RIFLETTI SULLA TEORIA

78 **VERO O FALSO?**

a) Un'omotetia di centro P e rapporto -1 è una simmetria assiale. V F

b) La congruenza degli angoli è un invariante per le omotetie. V F

c) La composizione di due omotetie con lo stesso centro è un'omotetia che ha lo stesso centro e, per rapporto di omotetia, la somma dei due rapporti. V F

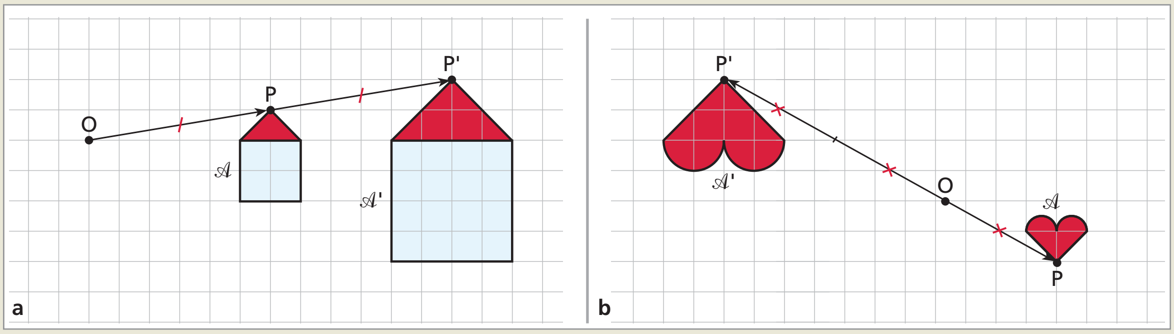
d) La similitudine è un'omotetia. V F

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 6 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

79 Nei due riquadri ci sono due figure omotetiche $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$. Alla figura $\mathscr{A}$ corrisponde la figura $\mathscr{A}'$. Stabiliamo se le omotetie di centro O sono dirette o inverse e calcoliamo il rapporto k di omotetia.



a) Poiché i vettori $\vec{OP}'$ e $\vec{OP}$ hanno lo stesso verso, l'omotetia è diretta. Il rapporto k di omotetia è dato dal rapporto fra i vettori $\vec{OP}'$ e $\vec{OP}$. Poiché $\vec{OP}'$ è il doppio di $\vec{OP}$,

$$k = \frac{\vec{OP}'}{\vec{OP}} = 2.$$

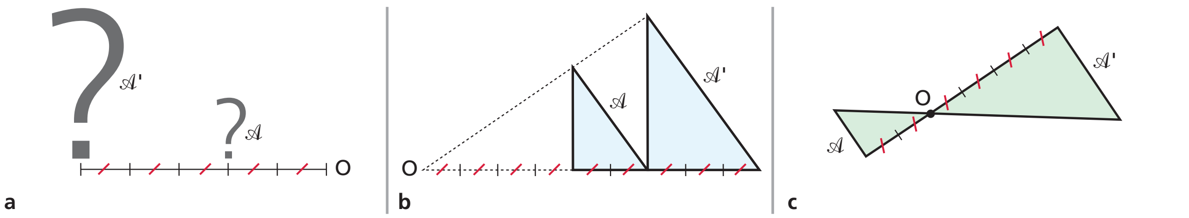
Si tratta di un ingrandimento.

b) Poiché i vettori $\vec{OP}'$ e $\vec{OP}$ hanno verso opposto, l'omotetia è inversa. Il rapporto k di omotetia è dato dal rapporto fra i vettori $\vec{OP}'$ e $\vec{OP}$. Poiché OP' è il doppio di OP,

$$k = \frac{\vec{OP}'}{\vec{OP}} = -2.$$

Si tratta ancora di un ingrandimento.

80 In ogni riquadro ci sono due figure omotetiche $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$. Alla figura $\mathcal{A}$ corrisponde la figura $\mathcal{A}'$. Stabilisci se l'omotetia di centro O è diretta o inversa e determina il rapporto k di omotetia.

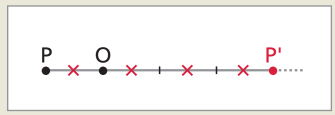


ESERCIZIO GUIDA

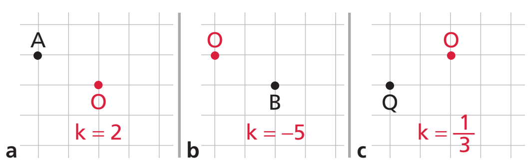
81 Dati i punti P e O determiniamo il punto P' corrispondente di P nell'omotetia di centro O e rapporto -3.

Poiché il rapporto di omotetia è negativo, il punto P' si trova da parte opposta a P rispetto a O. Pertanto congiungiamo P con O e prolunghiamo il segmento PO.

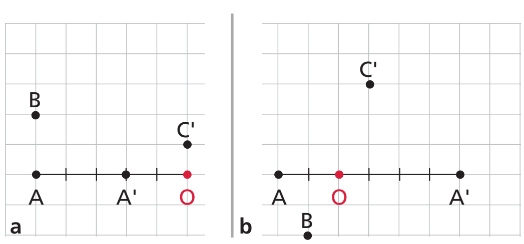
Poiché $\dfrac{\vec{OP'}}{\vec{OP}} = -3$, $|\vec{OP'}| = 3 \cdot |\vec{OP}|$, quindi costruiamo il segmento OP' triplo di OP. Il punto P' disegnato in figura è il punto cercato.



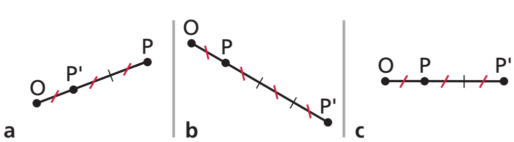
82 Determina per ogni riquadro il punto corrispondente rispettivamente ad A, B e Q nell'omotetia di centro O e rapporto k indicati.



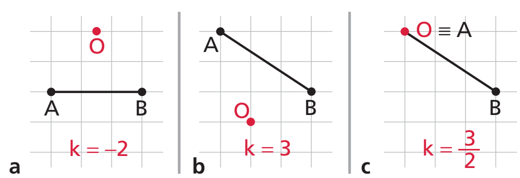
83 Nelle due figure un'omotetia di centro O trasforma A in A', B in B' e C in C'. Determina B' e C.



84 Il punto P' è omotetico di P nell'omotetia di centro O e rapporto 3. Quale figura rappresenta in modo corretto l'omotetia?

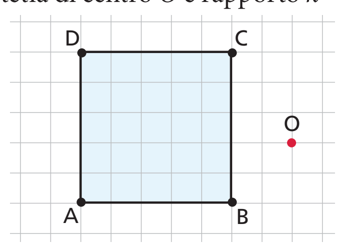


85 Disegna il segmento corrispondente nell'omotetia di centro O e rapporto indicato.

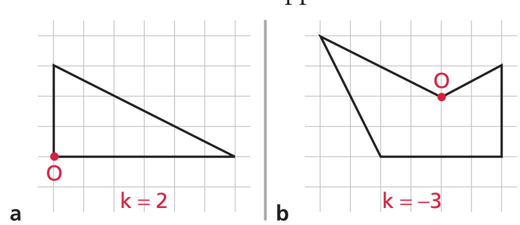


Le figure omotetiche

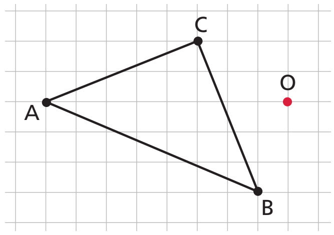
86 Disegna la figura omotetica della figura $ABCD$ nell'omotetia di centro O e rapporto $k = -2$.



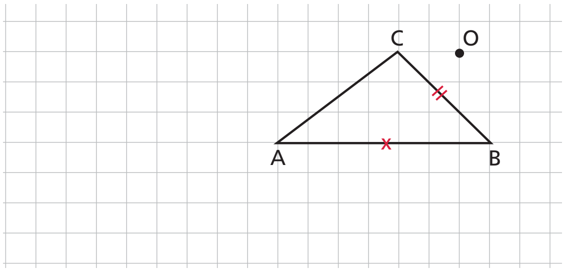
87 Disegna le figure omotetiche a quelle date nella omotetia di centro O e rapporto k indicati.



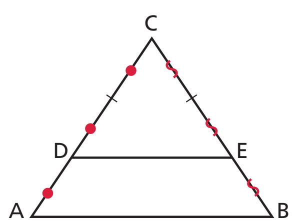
88 Disegna la figura omotetica della figura ABC nell'omotetia di centro O e rapporto $k = \frac{1}{2}$.



89 Disegna la figura omotetica di quella data nell'omotetia di centro O e rapporto $k = 2$.

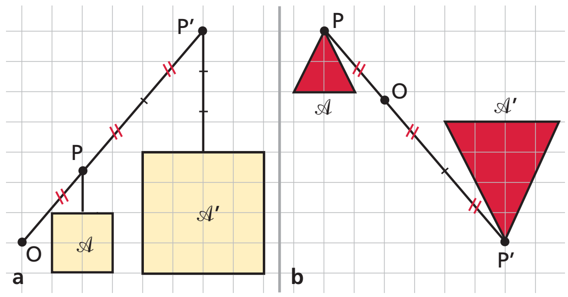


90 Nel triangolo ABC, il segmento DE è parallelo ad AB. Individua il centro e il rapporto dell'omotetia che trasforma A in D e B in E.



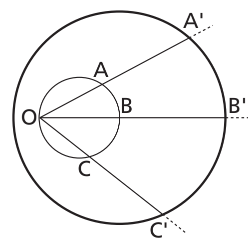
91 I lati opposti di un parallelogramma si possono corrispondere in una stessa omotetia di centro O?

92 Osserva i due disegni: alla figura $\mathscr{A}$ corrisponde la figura $\mathscr{A}'$. Stabilisci se le omotetie sono dirette o inverse e calcola il rapporto di omotetia k.

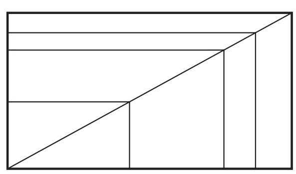


[a) $k = 3$; b) $k = -2$]

93 Esiste un'omotetia che fa corrispondere ad A il punto A', a B il punto B' e a C il punto C'?

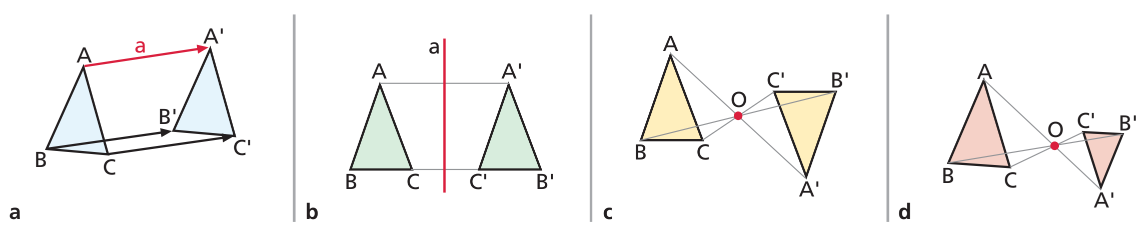


94 I rettangoli in figura sono omotetici fra loro?



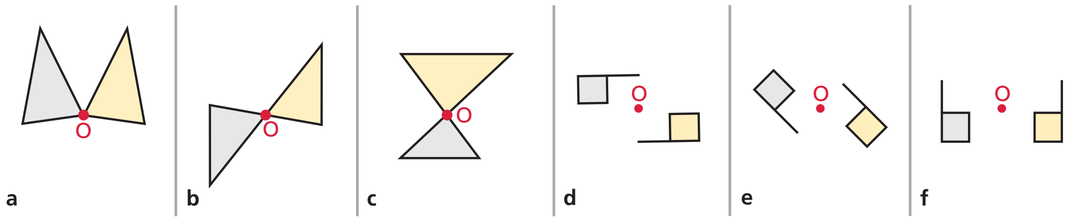
RIEPILOGO LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

95 Riconosci le seguenti trasformazioni.

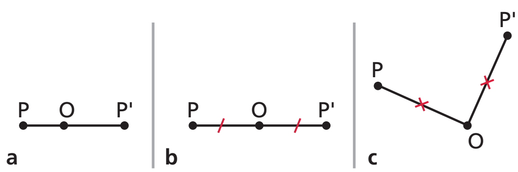


96 Disegna tutti gli assi di simmetria di un triangolo equilatero, di un quadrato e di un esagono regolare.

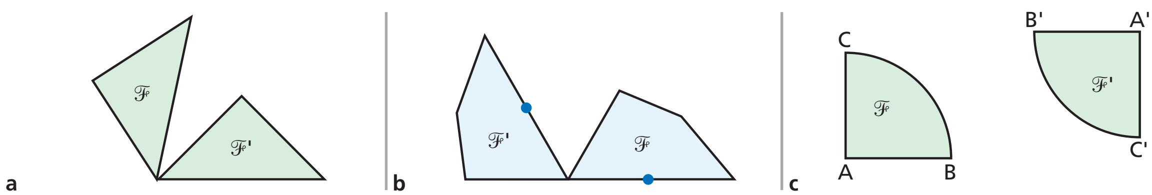
97 Individua in quali riquadri sono rappresentate in modo corretto una figura e la sua simmetrica rispetto al punto O.



98 Il punto P' è simmetrico di P rispetto al centro O. Quale figura rappresenta in modo corretto la simmetria?



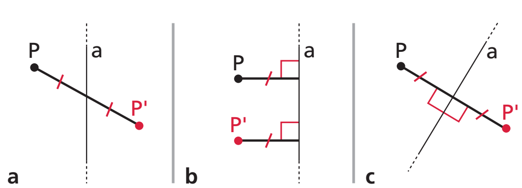
99 Individua il centro e l'angolo della rotazione che fa corrispondere a $\mathcal{F}$ la figura $\mathcal{F}'$.



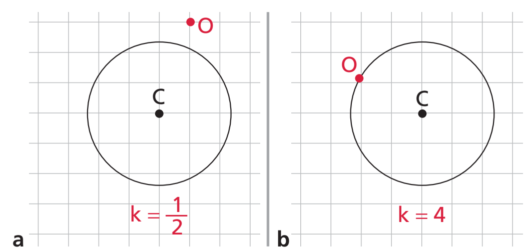
100 Decomponi un quadrato in otto triangoli congruenti, usando i suoi assi di simmetria.

101 Individua le rotazioni che trasformano in sé un triangolo equilatero, un quadrato e un esagono regolare.

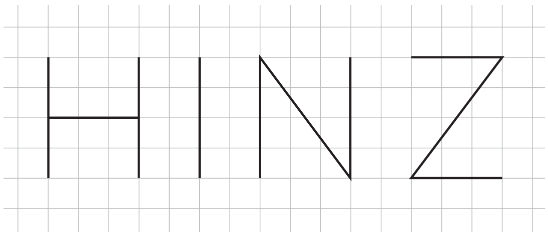
102 Il punto P' è simmetrico di P rispetto all'asse a. Quale figura rappresenta in modo corretto la simmetria?



103 Disegna il corrispondente di ogni cerchio in figura nell'omotetia di centro O e rapporto k indicati.

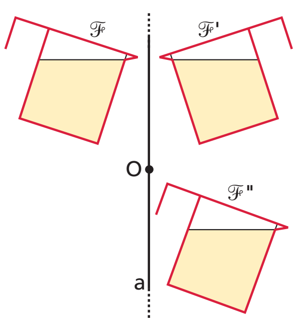


104 Determina il centro di simmetria delle seguenti lettere.



105 Scrivi altre due lettere dotate di un centro di simmetria.

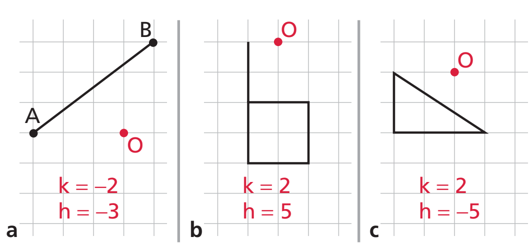
106 La figura $\mathcal{F}'$ dovrebbe essere la simmetrica di $\mathcal{F}$ rispetto all'asse a. La figura $\mathcal{F}''$ dovrebbe essere la simmetrica di $\mathcal{F}$ rispetto al punto O.
Che cosa c'è di sbagliato nella figura?



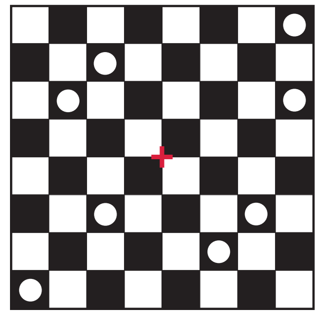
107 Gli angoli formati dai segmenti che compongono la lettera Z sono congruenti? Perché?

108 Una figura formata da due angoli con i lati paralleli discordi ammette un centro di simmetria?

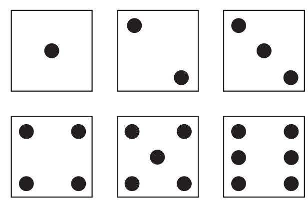
109 Per ciascuno dei riquadri esegui la composizione delle due omotetie di centro O e rapporto h e di centro O e rapporto k, come indicato in figura. Esegui poi la composizione delle due omotetie in ordine inverso.
Ottieni la stessa trasformazione?



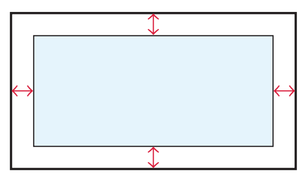
110 Sposta una pedina affinché la scacchiera abbia un centro di simmetria nel punto indicato dalla croce.



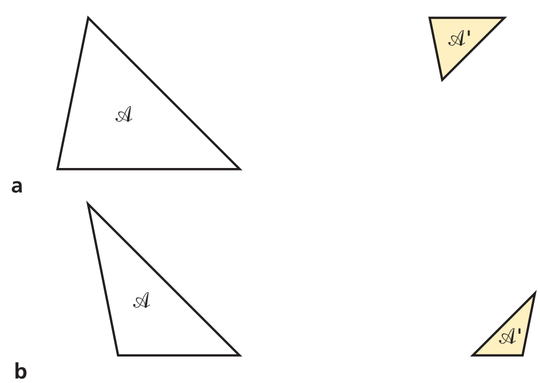
111 In figura sono rappresentate le sei facce di un dado. Per ognuna individua tutti gli assi di simmetria.



112 La cornice del quadro ha la stessa larghezza sui quattro lati. I due rettangoli che delimitano la cornice sono omotetici?



113 Per ognuna delle figure determina una trasformazione che trasformi il triangolo $\mathcal{A}$ nel triangolo $\mathcal{A}'$.



114 Considera un triangolo ABC e il punto D simmetrico di A rispetto a B. Determina il punto E immagine di B nella traslazione di vettore $\vec{AC}$. Il triangolo ABC è il trasformato di BDE in una traslazione. Qual è il vettore di questa traslazione?

115 Disegna un parallelogramma $ABCD$ di centro O. Nella simmetria di asse AC, indica con B' il simmetrico del vertice B e con D' il simmetrico del vertice D. Dimostra che la simmetria di centro O trasforma B' in D'.

116 Dati una retta r e due punti A e B fuori di essa, indica con H la proiezione di A su r e con H' la proiezione di B su r. Considera i punti A' e B' simmetrici di A e di B rispetto alla retta r. Se BH' è doppia di AH e HH' è triplo di AH, qual è il rapporto fra $A'B$ e HH'?

117 Dopo aver disegnato un triangolo ABC di base AB, indica con E il punto medio del lato AC e con F quello di BC. Utilizzando le proprietà della simmetria di centro F, dimostra che il segmento EF è parallelo ad AB e che EF è la metà di AB.

118 Disegna un triangolo equilatero ABC inscritto in una circonferenza di centro O. Le tangenti alla circonferenza in A e in B si incontrano nel punto E. Dimostra che il triangolo ABE è equilatero.

119 Considera due rette r e s che si intersecano nel punto P e un punto O che non appartiene a nessuna delle due rette. Nella simmetria di centro O, costruisci la retta r' corrispondente di r e indica con A il punto intersezione di r' con s. Indica con B il punto intersezione di AO con r. Dimostra che i punti A e B sono simmetrici rispetto al punto O.

120 Sono dati due rette r e s che si intersecano nel punto P e un punto O che non appartiene né a r né a s. Determina un segmento AB che abbia O come punto medio e gli estremi su r e su s.
(Suggerimento. Questo esercizio è un'applicazione della costruzione precedente.)

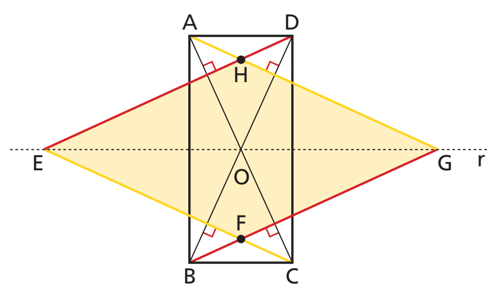
121 Disegna due rette r e r' che si intersecano nel punto O e un punto P esterno a entrambe. Indica con H la proiezione di P su r e con H' la proiezione di P su r'. Dimostra che se la simmetria di asse OP trasforma r in r', allora $PH \cong PH'$ e viceversa.

122 Disegna un triangolo ABC rettangolo in A, poi indica con N il punto medio dell'ipotenusa BC e con M il punto medio di AC.
a) Dimostra che AN e CN sono simmetrici rispetto a MN.
b) Traccia una retta a perpendicolare a MN che intersechi AN in E e CN in P. Dimostra che il triangolo PNE è isoscele.

123 Nel triangolo ABC indica con M il punto medio di AC e con N il punto medio di BC. Dimostra che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, utilizzando due simmetrie centrali, una di centro M e l'altra di centro N.
(Suggerimento. Conduci per il punto C la parallela ad AB.)

124 Nel parallelogramma $ABCD$ di centro O, proietta O sui quattro lati in modo da ottenere i punti E, F, G, H.
a) Che tipo di quadrilatero è $EFGH$?
b) Precisa che tipo di quadrilatero è $EFGH$ nel caso in cui $ABCD$ sia un rettangolo, oppure un quadrato, oppure un rombo.

125



Considera il rettangolo $ABCD$ in figura. Supponi che la retta r sia asse del lato AB e inoltre che $AG \perp BD$; $CE \perp BD$; $BG \perp AC$; $DE \perp AC$.
a) Nella simmetria di asse r determina le immagini di AG e DE e deduci che i punti E e G appartengono a r.
b) Dimostra che H e F appartengono all'asse di BC.
c) Dimostra che il quadrilatero $EFGH$ è un rombo.

LABORATORIO DI MATEMATICA

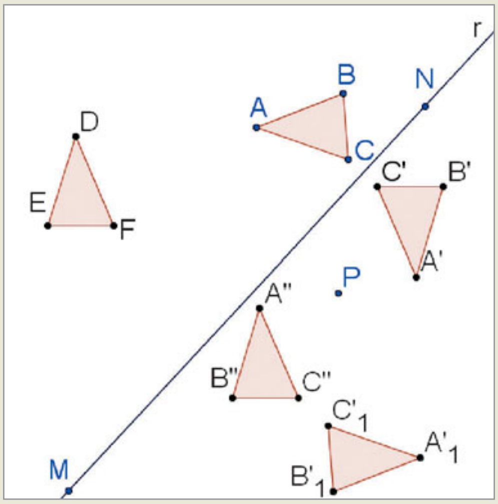
Le trasformazioni geometriche con GeoGebra

ESERCITAZIONE GUIDATA

Verifichiamo con un esempio che la composizione di due simmetrie non sempre gode della proprietà commutativa. Applichiamo a un triangolo una simmetria assiale e al suo trasformato una simmetria puntuale e poi scambiamo l'ordine delle due trasformazioni.

- Attiviamo GeoGebra e nascondiamo gli assi cartesiani e la finestra algebrica.
- Tracciamo con *Retta per due punti* una retta r, con *Nuovo Punto* un punto P fuori di essa e con *Poligono* un triangolo ABC (figura 1).
- Applichiamo al triangolo ABC con *Simmetrico rispetto a una retta* una simmetria assiale con asse la retta r ottenendo il triangolo $A'B'C'$ e poi a questi una simmetria con centro il punto P con *Simmetrico rispetto a un punto*, facendo apparire il triangolo $A''B''C''$.
- Applichiamo al triangolo ABC con *Simmetrico rispetto a un punto* una simmetria con centro il punto P ottenendo il triangolo $A_1'B_1'C_1'$ e poi a questi con *Simmetrico rispetto a una retta* una simmetria assiale con asse la retta r pervenendo al triangolo DEF.

Vediamo che i triangoli trasformati non coincidono, quindi concludiamo che in tal caso la composizione delle due simmetrie non gode della proprietà commutativa. Proviamo, poi, a portare il punto P sulla retta r e notiamo che i trasformati del triangolo secondo le due simmetrie vanno a coincidere.



▲ Figura 1

Nel sito: ► 1 esercitazione guidata con Cabri ► 15 esercitazioni in più

Esercitazioni

Usa il computer per svolgere le seguenti esercitazioni.

1 Applica a un quadrato $ABCD$ quattro rotazioni di 30° attorno ai quattro vertici.

2 Applica a un pentagono $ABCDE$ le cinque simmetrie centrali con centro i cinque vertici.

3 Applica a un ottagono $ABCDEFGH$ le otto simmetrie assiali aventi i lati come assi.

4 Applica al triangolo ABC l'omotetia di rapporto 4 e centro il suo baricentro G. Verifica che il triangolo trasformato $A'B'C'$ rispetto all'originale ha i lati paralleli e di misura quadrupla, gli angoli corrispondenti congruenti e l'area che misura sedici volte l'area di ABC.

5 Applica a una circonferenza, di centro O, la composizione di due traslazioni, che hanno come vettori due raggi $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$, fra loro perpendicolari, e una traslazione di vettore la somma dei due vettori.

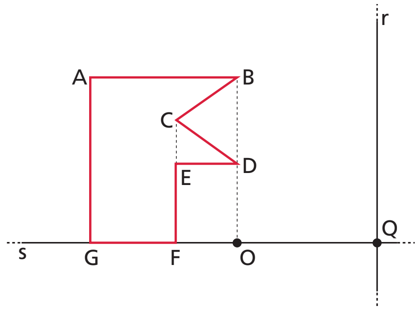
6 Applica a un triangolo isoscele ABC, di base BC, la composizione di due simmetrie: la prima di centro il vertice A, la seconda di centro il vertice B. Determina il vettore della traslazione equivalente.

7 Applica a un triangolo scaleno ABC la composizione di due trasformazioni: una simmetria centrale, di centro un punto O, e un'omotetia di centro O e di rapporto 2. Scambia le trasformazioni e indica se l'operazione di composizione è commutativa.

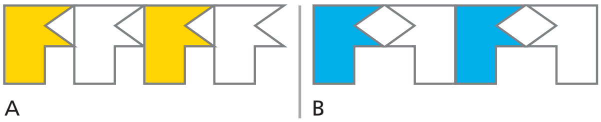
Matematica per il cittadino

LE ISOMETRIE NELL'ARTE

Durante un viaggio di istruzione, Elisa ha ammirato i bellissimi mosaici delle Domus dell'Ortaglia a Brescia e ha notato che molti fregi sono stati ottenuti utilizzando e componendo tra loro delle isometrie.
Si consideri la figura seguente, dove le rette r e s sono perpendicolari; il poligono $ABCDEFG$ ha i segmenti AB e GF, GA ed EF paralleli, e si ha $GO = OQ$.

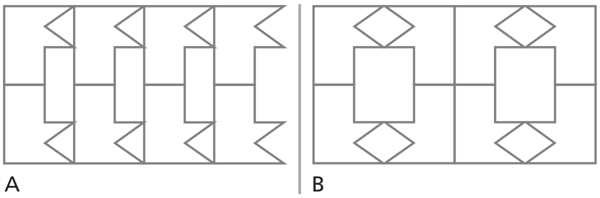


1. Partendo da questo elemento base, Elisa ha disegnato delle greche, colorate a piacimento e rappresentate in figura.



Quali isometrie sono state applicate all'elemento base per ottenere le greche A e B?

2. Continuando a disegnare, Elisa ha ottenuto delle decorazioni sempre più complesse traslando più volte un nuovo modulo, ricavato a sua volta applicando delle isometrie all'elemento base.



Partendo dall'elemento base, sapresti costruire passo passo il modulo da traslare? (Utilizza al massimo due trasformazioni.)

3. Cominciando dall'elemento base, segui le istruzioni date e disegna un nuovo modulo da traslare.
- Simmetria centrale rispetto al punto O.
- Simmetria assiale rispetto alla retta r.
- Traslazione dei quattro elementi ottenuti secondo un vettore $\vec{AB}$.

4. Osserva che le isometrie considerate fin qui sono traslazioni di vettore parallelo alla direzione del fregio (data dalla retta s), simmetrie assiali rispetto a s e a r, simmetrie centrali rispetto a un punto appartenente a s, cioè rotazioni di 180°. Spiega il perché di questa scelta, considerando che l'obiettivo è quello di ottenere una decorazione che sia un fregio, cioè un disegno contenuto dentro una striscia e generato dall'iterazione di una traslazione base.

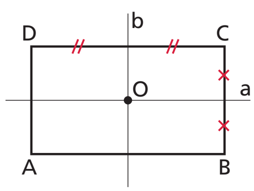
Verifiche di fine capitolo

TEST Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 20 test interattivi in più

1 Le proposizioni seguenti sono tutte vere *tranne* una. Quale?

- A Le traslazioni, eccettuato il caso dell'identità, non hanno punti uniti.
- B Le traslazioni sono isometrie.
- C L'unica traslazione che ammette segmenti uniti è l'identità.
- D Ogni traslazione ammette rette unite.
- E In una traslazione di vettore $\vec{AB}$, il rettangolo $ABCD$ si trasforma in un parallelogramma.

2 È dato il rettangolo $ABCD$.



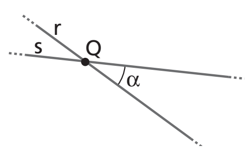
A esso viene applicata la trasformazione t tale che:

$$t(A) = C, \quad t(B) = D, \quad t(C) = A, \quad t(D) = B.$$

Una delle seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

- A t può essere una rotazione di centro O e angolo 180°.
- B I lati del rettangolo sono segmenti uniti.
- C t può essere la simmetria centrale di centro O.
- D Il rettangolo $ABCD$ è una figura unita.
- E t può essere la composizione delle due simmetrie assiali di assi a e b.

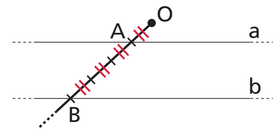
3 Osserva la figura.



La composizione delle simmetrie assiali di assi r e s è:

- A la simmetria assiale che ha per asse la bisettrice dell'angolo α.
- B la rotazione di centro Q e angolo 2α.
- C la rotazione di centro Q e angolo α.
- D una traslazione.
- E la simmetria centrale di centro Q.

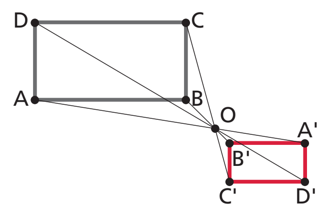
4 La retta b della figura è omotetica della retta a nell'omotetia di centro O e rapporto k.



Se AB è triplo di OA, allora k è uguale a:

A 4. B 3. C $\frac{1}{3}$. D $\frac{1}{4}$. E 1.

5 Il rettangolo $A'B'C'D'$ è l'immagine del rettangolo $ABCD$ nell'omotetia di centro O e rapporto k.



Se l'area di $ABCD$ è quadrupla di quella di $A'B'C'D'$ allora k è uguale a:

A 2. B -2. C 4. D $-\frac{1}{4}$. E $-\frac{1}{2}$.

6 Quale delle seguenti proposizioni sulle affinità è *vera*?

- A Trasformano rette parallele in rette parallele.
- B Mantengono inalterate le distanze.
- C Trasformano circonferenze in circonferenze.
- D Conservano gli angoli.
- E Lasciano invariata la forma delle figure.

7 La composizione di due simmetrie centrali di centri rispettivamente O e O' è:

- A la simmetria centrale avente per centro il punto medio di OO'.
- B la traslazione di vettore $\vec{OO'}$ oppure $\vec{O'O}$.
- C la simmetria assiale di asse coincidente con l'asse del segmento OO'.
- D una rotazione con centro nell'asse di simmetria OO'.
- E la traslazione di vettore $2\vec{OO'}$ oppure $2\vec{O'O}$.

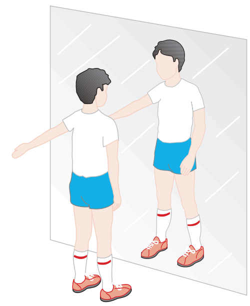
SPIEGA PERCHÉ

8 Le parole SI e NON ammettono un asse di simmetria? E un centro di simmetria?

9 Considera una semicirconferenza di diametro d e la simmetria assiale s_d rispetto al diametro d. La trasformazione $s_d \circ s_d$, applicata alla semicirconferenza, è involutoria?

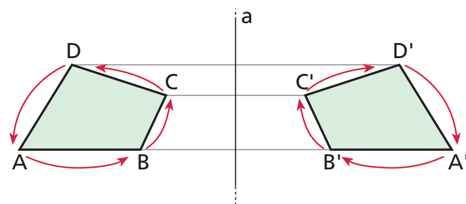
10 Motiva le risposte ai seguenti quesiti.
a) Esiste una proiettività che trasforma un cerchio in una corona circolare?
b) In una rotazione di 360° rispetto al proprio centro, un cerchio è una figura unita?
c) I punti del cerchio trasformato in **b)** sono punti uniti?

11 La figura illustra una situazione della vita quotidiana. Un bambino si diverte davanti allo specchio, perché trova strano che la sua immagine riflessa si avvicini se egli si avvicina e si allontani se egli si allontana. Se poi muove la mano sinistra, l'immagine muove la destra.



Le immagini speculari sono un esempio di simmetria *nello spazio*. Nello spazio, le figure sono solidi e la simmetria è rispetto a un piano anziché rispetto a un asse.

Spiega il fatto che la destra sia scambiata con la sinistra, pensando alla simmetria nel piano, aiutandoti con l'esempio qui sotto.



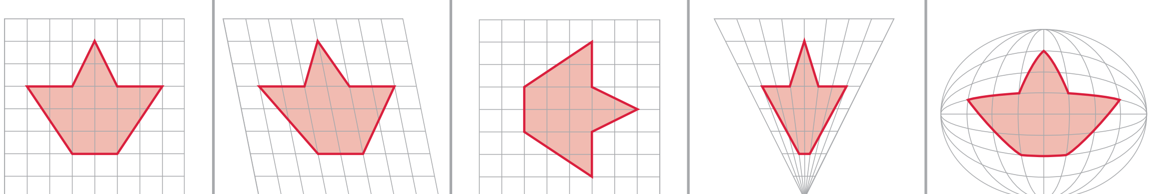
ESERCIZI

Nel sito: ▶ **19 esercizi in più**

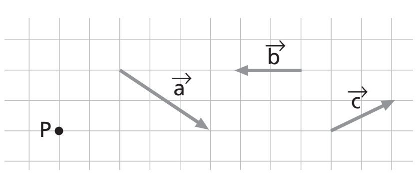
12 Considera la funzione t dal piano in sé che associa a un segmento AB una semicirconferenza di diametro AB. t è una trasformazione geometrica? Qual è l'immagine del punto medio di AB? E l'immagine di A?

13 Indica il nome della trasformazione rappresentata in ciascuna figura.

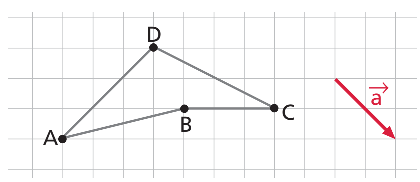
identità	....	....	....	....



14 Applica al punto P della figura la traslazione di vettore dato dalla somma dei vettori $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

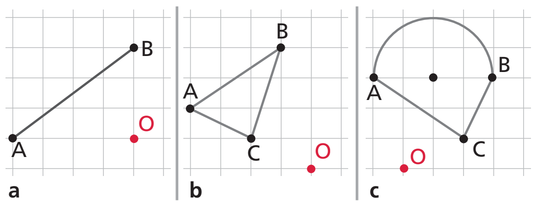


15 Trasla la figura secondo il vettore indicato.



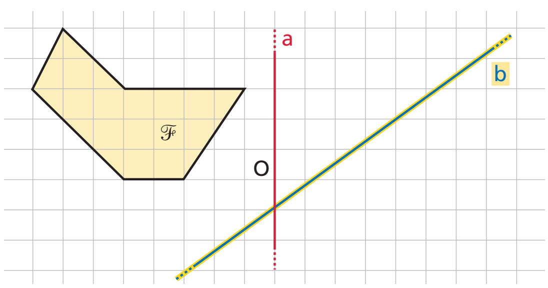
16 Dati due punti distinti A e B e un angolo α, disegna le due rotazioni di angolo α che associano il punto A al punto B.

17 Disegna il simmetrico di ognuna delle seguenti figure rispetto al punto O.

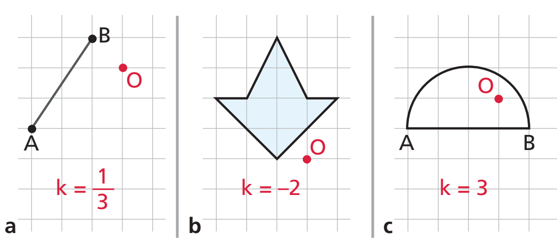


18 Disegna una circonferenza di centro O e raggio r. Traccia poi un suo asse di simmetria. Ve ne sono altri? Quanti sono? Esegui la stessa operazione e rispondi alle stesse domande nel caso di un triangolo isoscele.

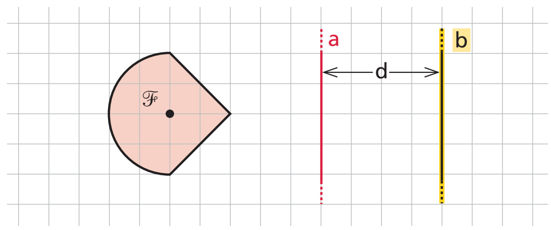
19 Partendo dalla figura $\mathscr{F}$, disegna la figura che si ottiene mediante la composizione delle simmetrie assiali $s_b \circ s_a$.



20 In ciascun caso disegna la figura corrispondente nell'omotetia di centro O e rapporto indicato.



21 A partire dalla figura $\mathscr{F}$, disegna la figura che ottieni applicando due simmetrie assiali rispetto alle rette parallele a e b, cioè applicando $s_b \circ s_a$. Indica di che tipo è la trasformazione $s_b \circ s_a$ e descrivine le caratteristiche.

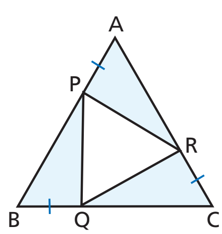


22 Dimostra che le bisettrici di un poligono regolare e gli assi dei lati si intersecano in uno stesso punto O, centro della circonferenza inscritta nel poligono.

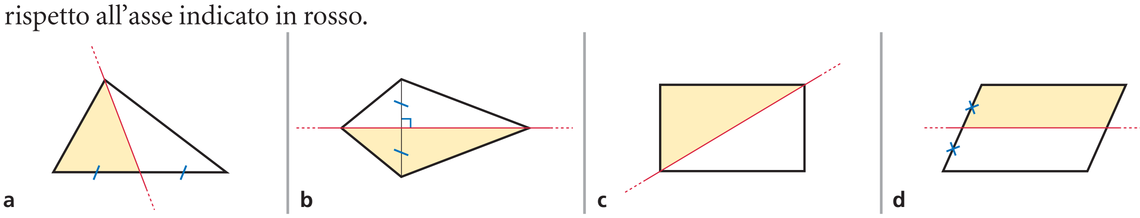
23 Dimostra che la distanza di un punto da una retta rappresenta la metà di un segmento di cui la retta è asse di simmetria.

24 Disegna una circonferenza di centro O e una retta r tangente alla circonferenza nel punto B. Considera una rotazione di centro O e ampiezza 120° e costruisci la retta r' corrispondente di r e il punto C corrispondente di B nella rotazione. Indica con A il punto intersezione di r con r'. Dimostra che il quadrilatero $ABOC$ è inscrivibile in una circonferenza.

25 Il triangolo ABC in figura è equilatero. Inoltre è $AP \cong BQ \cong CR$. Dimostra che PQR è un triangolo equilatero. (Suggerimento. Determina il punto di intersezione O delle mediane di ABC…)



26 Individua in quale dei riquadri seguenti sono rappresentate in modo corretto una figura e la sua simmetrica rispetto all'asse indicato in rosso.

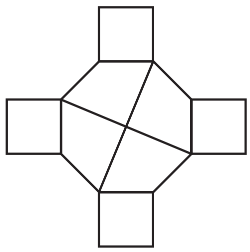


METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 4 esercizi in più

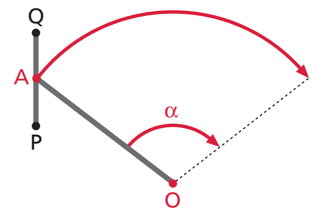
27 TEST Quanti assi di simmetria possiede la figura?

- A 2.
- B 4.
- C 6.
- D 8.
- E Nessuna delle precedenti.



(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 2000)

28 Considera un sistema formato da un'asta OA che ruota intorno al punto O e da un'asta PQ che mantiene sempre la stessa direzione, fissata a OA per un suo punto, come in figura (pensa al tergicristallo di un'automobile). Qual è il luogo descritto dai punti P e Q al variare di A nella rotazione?



TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 6 esercizi in più

29 TEST The following is not an isometry:

- A a rotation.
- B a reflection.
- C a translation.
- D a dilation.

(USA *Northern State University: 52nd Annual Mathematics Contest*, 2005)

30 TEST Which of the following statements is not true?

- A A reflection in a line is congruent to the original figure.
- B Corresponding sides of a figure and its reflection in a line are parallel.
- C Corresponding sides of a figure and its reflection in a line are congruent.
- D The line of symmetry bisects a segment connecting corresponding points of a figure and its reflection.
- E The line of symmetry is perpendicular to a segment connecting corresponding points of a figure and its reflection.

(USA *Northern State University: 52nd Annual Mathematics Contest*, 2005)

31 TEST A quadrilateral that is central symmetric with respect to a point is always:

- A a rectangle.
- B a rhombus.
- C a parallelogram.
- D a square.
- E a trapezoid.

32 How many different isometries transform a regular pentagon in itself? [10]

33 TEST If the length of each side of a triangle is increased by 20%, then the area of the triangle is increased by:

- A 40%.
- B 44%.
- C 48%.
- D 52%.
- E 60%.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

GLOSSARY

to bisect: dividere in due parti uguali
dilation: dilatazione (omotetia)
to increase: aumentare
isometry: isometria
length: lunghezza
reflection: riflessione (simmetria assiale)
rotation: rotazione
statement: enunciato
translation: traslazione
trapezoid: trapezio